Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

Rodzaj dokumentu:	**Osiągnięcia uczniów kończących VIII klasę szkoły podstawowej.** **Sprawozdanie za rok 2023**
Egzamin:	**Egzamin ósmoklasisty**
Przedmiot:	**Matematyka**
Termin egzaminu:	24 maja 2023 r.
Data publikacji dokumentu:	19 września 2023 r.

WOJEWÓDZTWO PODKARPACKIE

1. Opis arkusza standardowego

W roku szkolnym 2022/2023 egzamin ósmoklasisty z matematyki został przeprowadzany na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w rozporządzeniu w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu ósmoklasisty[1].

Uczniowie bez dysfunkcji oraz uczniowie z dysleksją rozwojową rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-100-2305. Arkusz egzaminacyjny zawierał 19 zadań, w tym 15 zadań zamkniętych (zadania wyboru wielokrotnego, zadania prawda-fałsz, zadania na dobieranie) i 4 zadania otwarte. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań można było uzyskać maksymalnie 25 punktów. Zadania obejmowały zagadnienia z zakresu m.in. arytmetyki, algebry i geometrii. Od ósmoklasistów wymagały uważnej analizy treści i elementów graficznych, a w przypadku zadań otwartych – dodatkowo zaplanowania i zapisania kolejnych etapów rozwiązania oraz sformułowania odpowiedzi.

2. Dane dotyczące populacji uczniów

TABELA 1. UCZNIOWIE ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM

Liczba uczniów		**23 688**
Uczniowie	bez dysleksji rozwojowej	19 780
	z dysleksją rozwojową	3 908
	dziewczęta	11 902
	chłopcy	11 786
	ze szkół na wsi	12 232
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	3 668
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	5 298
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	2 490
	ze szkół publicznych	22 927
	ze szkół niepublicznych	761
	o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy[2] (obywatele Ukrainy)	270

Z egzaminu zwolniono 42 uczniów - laureatów i finalistów olimpiad przedmiotowych oraz laureatów konkursów przedmiotowych o zasięgu wojewódzkim lub ponadwojewódzkim.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 15 lipca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu ósmoklasisty przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1591).
[2] Ustawa z dnia 12 marca 2022 r. o pomocy obywatelom Ukrainy w związku z konfliktem zbrojnym na terytorium tego państwa (Dz.U. z 2023, poz. 103, z późn. zm.).

TABELA 2. UCZNIOWIE ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Uczniowie	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	331
	słabowidzący i niewidomi	49
	słabosłyszący i niesłyszący	100
	z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim	319
	z afazją	29
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	7
	z zaburzeniem widzenia barw	2
	o których mowa w art. 165 ust. 1 ustawy[3] (cudzoziemcy)	45
	o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy (obywatele Ukrainy)	270
	Ogółem	**1 152**

[3] Ustawa z dnia 14 grudnia 2016 r. *Prawo oświatowe* (Dz.U. z 2023 r. poz. 900).

3. Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			24 maja 2023 r.
Czas trwania egzaminu			100 minut dla uczniów rozwiązujących zadania w arkuszu standardowym lub czas przedłużony zgodnie z przyznanym dostosowaniem
Liczba szkół			950
Liczba zespołów egzaminatorów			13
Liczba egzaminatorów			241
Liczba obserwatorów[4] (§ 7 ust. 1)			32
Liczba unieważnień[4]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez ucznia	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez ucznia w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócania przez ucznia prawidłowego przebiegu egzaminu ósmoklasisty	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez ucznia	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenia naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzania egzaminu ósmoklasisty	5
	art. 44zzy ust. 10	niemożności ustalenia wyniku (np. zaginięcia karty odpowiedzi)	0
	inne (np. złe samopoczucie ucznia)		0
Liczba wglądów[5] (art. 44zzz ust. 1)			96

[4] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 2 sierpnia 2022 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu ósmoklasisty (Dz.U. poz. 1636).
[5] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2022 r. poz. 2230).

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki uczniów

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

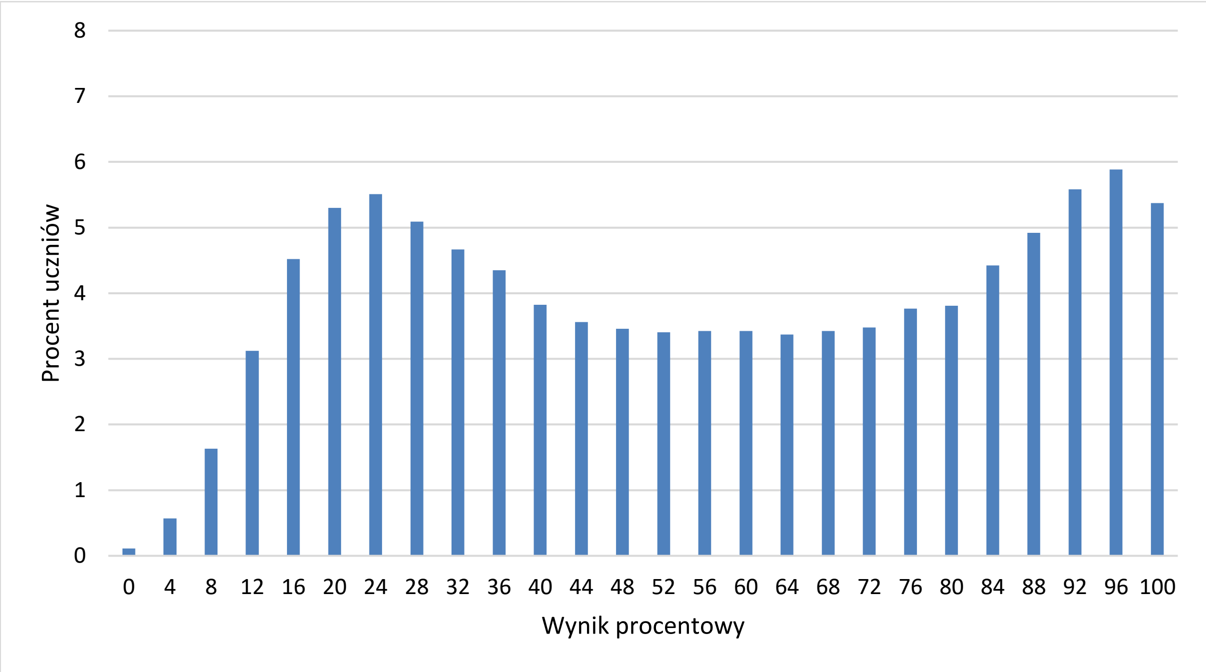


TABELA 4. WYNIKI UCZNIÓW – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
23 688	0	100	56	96	56	29

Wyniki uczniów w procentach, odpowiadające im wartości centyli i wyniki na skali staninowej

TABELA 5. WYNIKI UCZNIÓW W PROCENTACH, ODPOWIADAJĄCE IM WARTOŚCI CENTYLI I WYNIKI NA SKALI STANINOWEJ

Matematyka		
wynik procentowy	wartość centyla	stanin
0	1	1
4	1	
8	4	
12	8	2
16	13	
20	19	3
24	25	
28	31	4
32	36	
36	40	
40	44	
44	48	5
48	51	
52	55	
56	58	
60	61	
64	64	
68	67	6
72	71	
76	74	
80	77	
84	81	
88	85	7
92	90	
96	95	8
100	100	9

W tabeli 5. przedstawiono wyniki procentowe uczniów i odniesiono je do wartości centyla i odpowiadającego im stanina. Wyniki w skali centylowej i staninowej umożliwiają porównanie wyniku ucznia z wynikami uczniów w całym kraju. Na przykład, jeśli uczeń z matematyki uzyskał 76% punktów możliwych do zdobycia (wynik procentowy), to oznacza, że jego wynik jest taki sam lub wyższy od wyniku 74% wszystkich zdających (wynik centylowy), a niższy od wyniku 26% zdających i znajduje się on w 6. staninie.

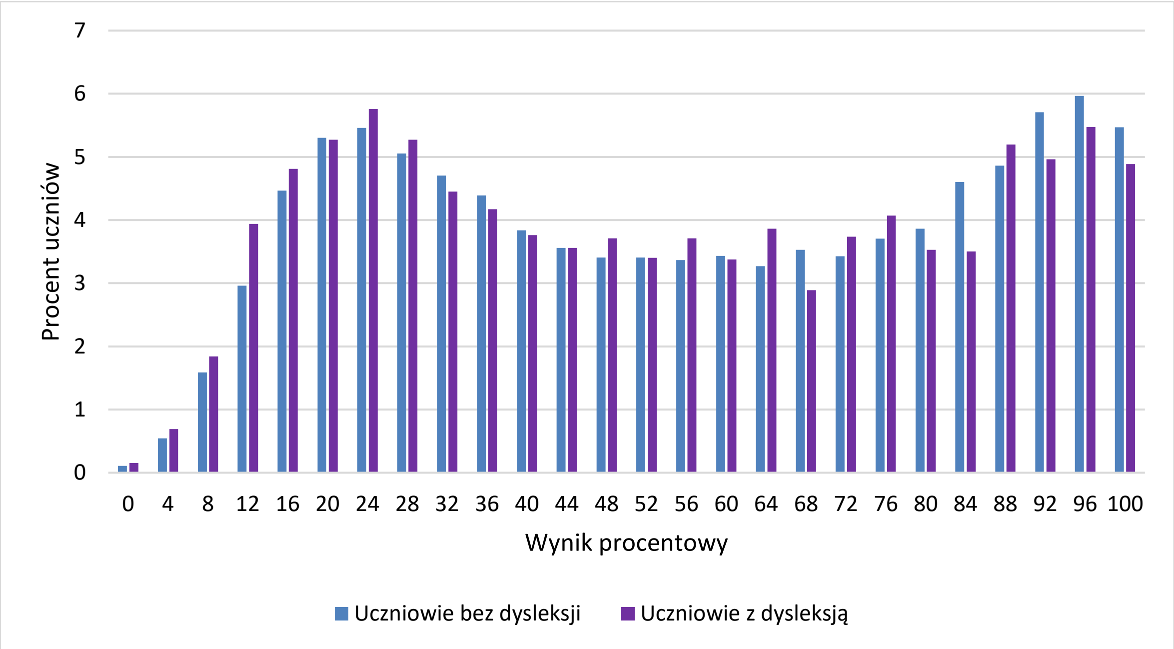
Średnie wyniki szkół[6] na skali staninowej

TABELA 6. WYNIKI SZKÓŁ NA SKALI STANINOWEJ

Stanin	Przedział wyników (w%)
1	10–29
2	30–36
3	37–41
4	42–47
5	48–54
6	55–60
7	61–67
8	68–76
9	77–96

Skala staninowa umożliwia porównywanie średnich wyników szkół w poszczególnych latach. Uzyskanie w kolejnych latach takiego samego średniego wyniku w procentach nie oznacza tego samego poziomu osiągnięć.

Wyniki uczniów bez dysleksji oraz uczniów z dysleksją rozwojową



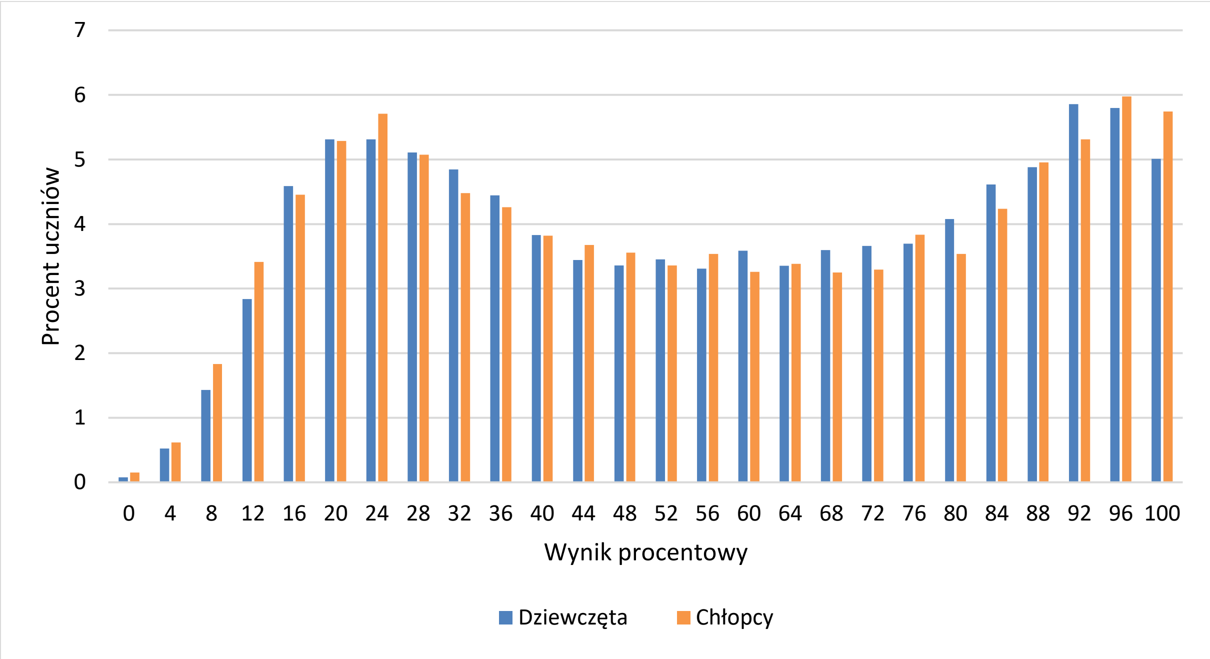
WYKRES 2. ROZKŁADY WYNIKÓW UCZNIÓW BEZ DYSLEKSJI ORAZ UCZNIÓW Z DYSLEKSJĄ ROZWOJOWĄ

[6] Ilekroć w niniejszym sprawozdaniu jest mowa o wynikach szkół w 2023 roku, przez szkołę należy rozumieć każdą placówkę, w której liczba uczniów przystępujących do egzaminu była nie mniejsza niż 5. Wyniki szkół obliczono na podstawie wyników uczniów, którzy wykonywali zadania z arkusza OMAP-100-2305.

TABELA 7. WYNIKI UCZNIÓW BEZ DYSLEKSJI ORAZ UCZNIÓW Z DYSLEKSJĄ ROZWOJOWĄ – PARAMETRY STATYSTYCZNE

	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Uczniowie bez dysleksji	19 780	0	100	56	96	56	29
Uczniowie z dysleksją rozwojową	3 908	0	100	52	24	54	29

Wyniki dziewcząt i chłopców



WYKRES 3. ROZKŁADY WYNIKÓW DZIEWCZĄT I CHŁOPCÓW

TABELA 8. WYNIKI DZIEWCZĄT I CHŁOPCÓW – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Płeć	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Dziewczęta	11 902	0	100	56	92	56	28
Chłopcy	11 786	0	100	56	96	55	29

Wyniki uczniów a wielkość miejscowości

TABELA 9. WYNIKI UCZNIÓW W ZALEŻNOŚCI OD LOKALIZACJI SZKOŁY – PARAMETRY STATYSTYCZNE

	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Wieś	12 232	0	100	48	24	53	28
Miasto do 20 tys. mieszkańców	3 668	0	100	56	20	56	29
Miasto od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	5 298	0	100	60	96	58	29
Miasto powyżej 100 tys. mieszkańców	2 490	4	100	72	100	66	28

Wyniki uczniów szkół publicznych i szkół niepublicznych

TABELA 10. WYNIKI UCZNIÓW SZKÓŁ PUBLICZNYCH I SZKÓŁ NIEPUBLICZNYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE

	Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Szkoła publiczna	22 927	0	100	56	96	56	29
Szkoła niepubliczna	761	0	100	60	100	57	29

Poziom wykonania zadań

TABELA 11. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

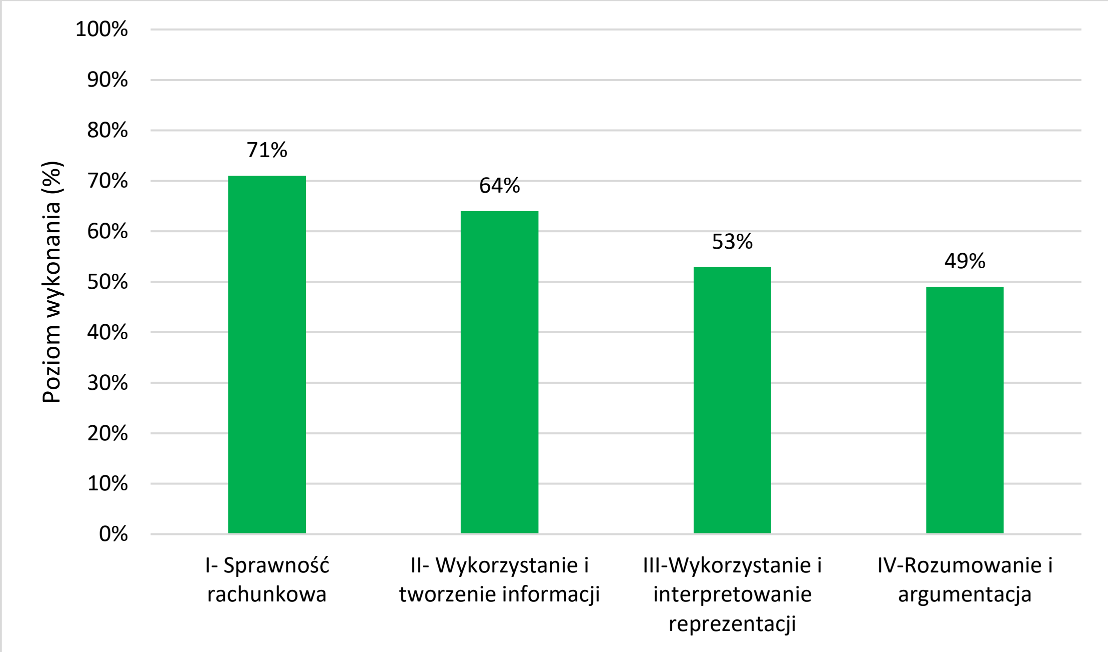
Wymagania egzaminacyjne 2023			
Numer zadania	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe**	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.	XIII. Proporcjonalność prosta. Uczeń: 2) wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej […].	68%
2.	I. Sprawność rachunkowa. 1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.	II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 10) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych. IV. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń: 4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika.	67%
3.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	IX. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi. Uczeń: 3) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.	59%
4.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.	XXII. Zadania tekstowe. Uczeń: 3) dostrzega zależności między podanymi informacjami. II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową lub dwucyfrową […]. V. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń: 2) […] mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci […] lub pisemnie.	72%
5.	I. Sprawność rachunkowa. 1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub w działaniach trudniejszych pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.	VIII. Pierwiastki. Uczeń: 1) oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych.	75%
6.	IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzenie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.	XII. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń: 4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi.	43%

7.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	VII. Potęgi o podstawach wymiernych. Uczeń: 2) mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich; 4) podnosi potęgę do potęgi.	43%
8.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.	IX. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi. Uczeń: 4) […] zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych.	69%
9.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.	XIX. Geometria przestrzenna. Uczeń: 1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy (w tym proste i prawidłowe) […] w sytuacjach praktycznych […].	59%
10.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.	VI. Obliczenia praktyczne. Uczeń: 4) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: […] centymetr, […] metr […]; 6) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali […].	49%
11.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	XX. Wprowadzenie do kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń: 2) przeprowadza proste doświadczenia losowe, polegające na […] losowaniu np. kuli spośród zestawu kul, analizuje je i oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych. IV. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń: 12) porównuje ułamki (zwykłe […]).	69%
12.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	XVI. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń: 2) zna najważniejsze własności […], prostokąta […]; 6) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego). XVII. Wielokąty. Uczeń: 4) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków.	75%
13.	IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.	XIV. Proste i odcinki. Uczeń: 2) rozpoznaje proste i odcinki prostopadłe i równoległe. II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 4) wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych.	50%

14.	IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.	XVII. Wielokąty. Uczeń: 5) stosuje wzory na pole […] kwadratu […], przedstawionych na rysunku […].	64%
15.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	XVII. Wielokąty. Uczeń: 7) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.	54%
16.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	XII. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń: 4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą […]. XXII. Zadania tekstowe. Uczeń: 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki […] oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.	55%
17.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.	VI. Obliczenia praktyczne. Uczeń: 4) […] prawidłowo stosuje jednostki długości […]; 7) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie […] oraz stosuje jednostki prędkości […] m/s. XIII. Proporcjonalność prosta. Uczeń: 2) wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej […].	60%
18.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.	XVII. Wielokąty. Uczeń: 5) stosuje wzory na pole trójkąta […] przedstawionych na rysunku […], a także do wyznaczania długości odcinków […].	38%
19.	IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.	XIX. Geometria przestrzenna. Uczeń: 4) oblicza objętość […] prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi.	45%

Poziom wykonania zadań w zakresie poszczególnych obszarów umiejętności

WYKRES 4. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W ZAKRESIE POSZCZEGÓLNYCH OBSZARÓW UMIEJĘTNOŚCI



Komentarz

Arkusz egzaminacyjny składał się z 19 zadań. W zestawie nie było zadań bardzo trudnych oraz zadań bardzo łatwych. Najliczniejszą grupę stanowiło dziesięć zadań, które były umiarkowanie trudne (poziom wykonania od 52% do 67%). Sześć zadań było trudnych (poziom wykonania od 35% do 48%) oraz trzy zadania – łatwe (poziom wykonania od 70% do 73%). Uczniowie uzyskali średnio za rozwiązanie zadań zamkniętych 59% punktów możliwych do zdobycia, a za rozwiązanie zadań otwartych 46% punktów.

Pierwsze wymaganie ogólne, czyli **sprawność rachunkowa**, sprawdzane było dwoma zadaniami zamkniętymi: 2. i 5. Zdający uzyskali za ich rozwiązanie średnio 69% punktów możliwych do zdobycia. Najłatwiejsze dla uczniów okazało się zadanie 5. W tym zadaniu udzielenie poprawnej odpowiedzi wymagało od uczniów wykonania działań w odpowiedniej kolejności. Ósmoklasiści musieli najpierw obliczyć wartości pierwiastków kwadratowych podanych liczb, a następnie obliczyć różnicę oraz sumę wyrażeń arytmetycznych. Zadanie poprawnie rozwiązało 73% uczniów.
Przykład 1. przedstawia poprawne rozwiązanie zamieszczone w brudnopisie.

Przykład 1.

$$\sqrt{81} - \sqrt{49} = 9 - 7 = 2$$

$$\sqrt{144} + \sqrt{25} = 12 + 5 = 17$$

W zadaniu 2. należało ustalić hasło do pliku, w którym podano sposób obliczenia pierwszych i ostatnich dwóch cyfr. Czynnością, którą musiał wykonać uczeń, było obliczenie sześcianu liczby naturalnej oraz obliczenie wspólnego mianownika dwóch ułamków. Poprawnie rozwiązało to zadanie 65% zdających. Analizując wyniki, można zauważyć, że trudność sprawiało uczniom obliczenie sześcianu liczby 4. Blisko 14% uczniów wybrało odpowiedź, w której hasło zawiera prawidłowo ustalony najmniejszy wspólny mianownik dwóch ułamków i równocześnie niepoprawnie obliczony sześcian liczby 4. Dobrze ilustruje ten błąd przykład 2., w którym uczeń zapisuje sześcian liczby 4 w postaci iloczynu liczb 6 i 4.

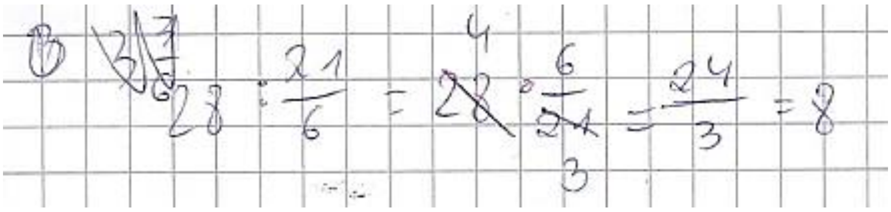
Przykład 2.

sześcian liczby $4 \cdot 6$

Drugie wymaganie ogólne, czyli **wykorzystanie i tworzenie informacji**, sprawdzane było pięcioma zadaniami zamkniętymi. Zdający uzyskali za ich rozwiązanie średnio 61% punktów możliwych do zdobycia.

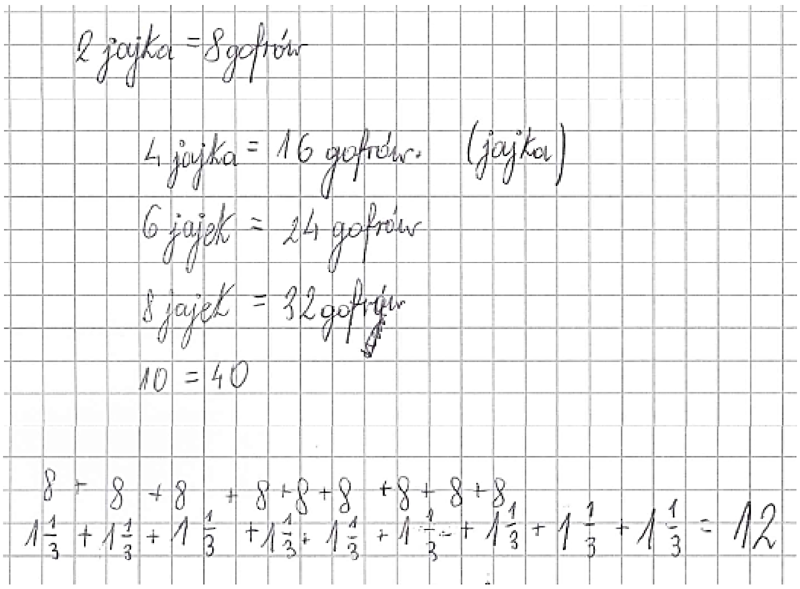
W tej grupie zadań najłatwiejszym okazało się zadanie 4. W tym zadaniu należało ustalić maksymalną liczbę książek, które można zmieścić na półce przy wskazanym sposobie ich ustawienia. Udzielenie poprawnej odpowiedzi wymagało od uczniów wykazania się umiejętnością analizowania i interpretowania danych przedstawionych w treści zadania w formie słownej i graficznej, a następnie wykonania działań na liczbach naturalnych i ułamkach. Przykład 3. ilustruje zapisanie rozwiązania zadania za pomocą jednego wyrażenia arytmetycznego.

Przykład 3.



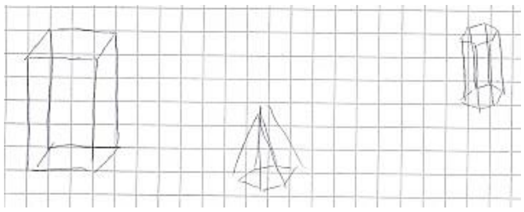
W grupie zadań umiarkowanie trudnych, sprawdzających umiejętności z zakresu drugiego wymagania ogólnego, znalazły się zadania 1., 8. i 9. Najłatwiejszym z nich okazało się zadanie 8., które wymagało umiejętności przedstawienia opisanych słownie działań za pomocą wyrażeń algebraicznych. Poprawnej odpowiedzi udzieliło 67% zdających.
Nieco trudniejsze dla ósmoklasistów było zadanie 1. typu prawda-fałsz, w którym poprawnej oceny obu zdań dokonało 65% zdających. W tym zadaniu należało skorzystać z wielkości wprost proporcjonalnych w celu obliczenia liczby składników potrzebnych do przygotowania gofrów według podanego przepisu. Na końcowy wynik wpłynęła ocena prawdziwości drugiego zdania. Blisko 30% uczniów uznało, że jest to zdanie fałszywe. Przykład 4. przedstawia poprawne rozwiązanie zamieszczone w brudnopisie.

Przykład 4.



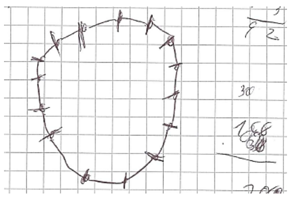
Kolejnym zadaniem z obszaru wykorzystania i tworzenia informacji było zadanie 9., które wymagało od zdających wykazania się umiejętnościami z zakresu geometrii przestrzennej, a dokładniej – obliczenia liczby wierzchołków graniastosłupa o takiej samej podstawie, co ostrosłup, który ma 16 wierzchołków. Zadanie to poprawnie rozwiązało 57% zdających. Najczęstszym błędem, który popełniło blisko 32% ósmoklasistów było zaznaczenie odpowiedzi zawierającej dwukrotność liczby wierzchołków ostrosłupa. W udzieleniu prawidłowej odpowiedzi do tego zadania pomocne okazały się rysunki przedstawiające ostrosłupy i graniastosłupy o określonej podstawie oraz analiza różnicy w liczbie ich wierzchołków, co obrazuje przykład 5. i przykład 6.

Przykład 5.



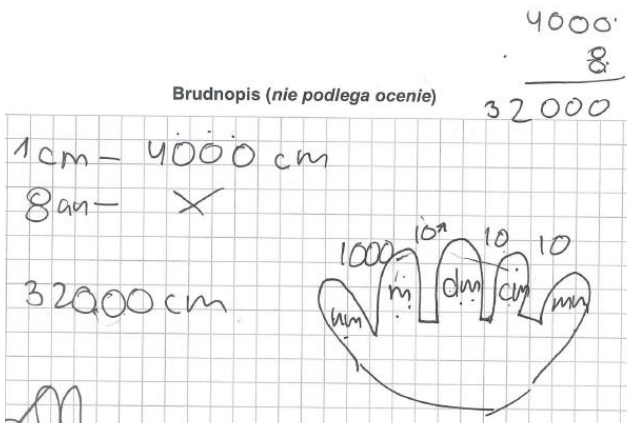
Przykład 6. Przedstawia rozwiązanie, w którym uczeń narysował jedynie podstawę ostrosłupa, na której zaznaczono 15 wierzchołków i zapisano obok liczbę 30.

Przykład 6.



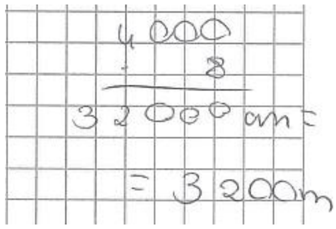
Najtrudniejszym zadaniem sprawdzającym wykorzystanie i tworzenie informacji, okazało się zadanie 10. Rozwiązanie tego zadania wymagało obliczenia rzeczywistej długości odcinka przy podanej jego długości w skali. Poprawnie rozwiązało je 47% zdających.
Przykład 7. ilustruje skorzystanie przez ucznia z własności wielkości wprost proporcjonalnych do obliczenia zadanej odległości w linii prostej w terenie między dwoma przystankami.

Przykład 7.



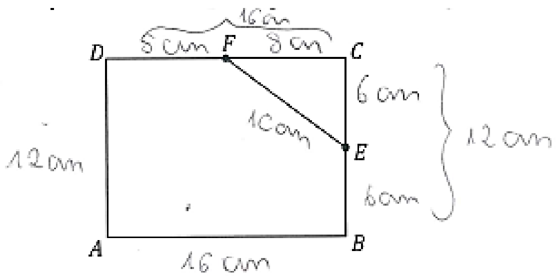
Blisko co trzeci uczeń (32%) nie poradził sobie z zamianą jednostki. Przykład 8. jest ilustracją tego typu trudności.

Przykład 8.



Trzecie wymaganie ogólne, czyli **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji**, sprawdzane było ośmioma zadaniami, w tym pięcioma zamkniętymi (zadania 3., 7., 11., 12. i 15.) oraz trzema otwartymi (zadania 16., 17. i 18.). Za ich rozwiązanie zdający uzyskali średnio 51% punktów możliwych do zdobycia. Najłatwiejszym w tej grupie, a jednocześnie w całym arkuszu, okazało się zadanie 12. Prawidłowej odpowiedzi udzieliło 73% piszących. W tym zadaniu, aby obliczyć obwód prostokąta, należało zastosować własności tego czworokąta oraz twierdzenie Pitagorasa. Treść zadania wzbogacono rysunkiem, który uczniowie wykorzystywali do zapisywania rozwiązania (przykład 9.) lub przerysowywali prostokąt w brudnopisie. Jak pokazują przykłady 9. oraz 10., uczniowie często zauważali, że trójkąt *ECF* jest pitagorejski i nie wykonując obliczeń, zapisywali długość odcinka *FC*.

Przykład 9.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

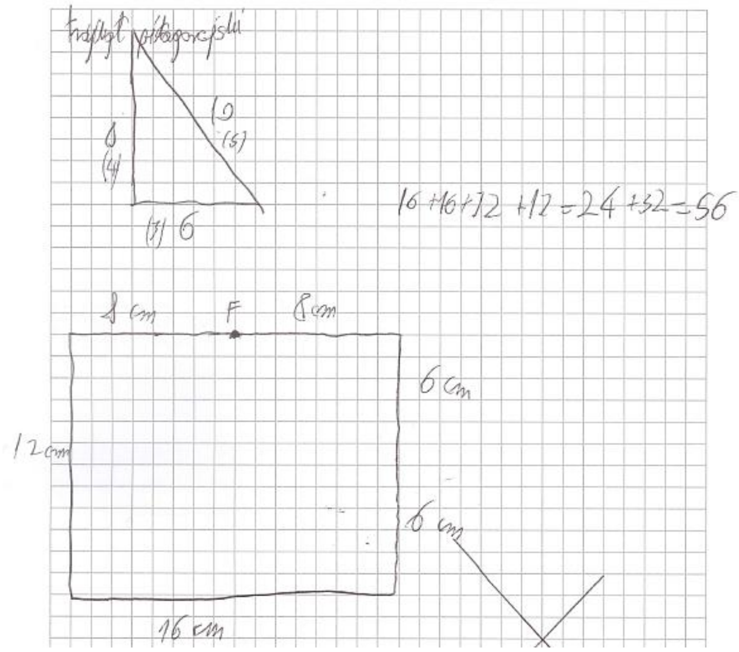
Obwód prostokąta $ABCD$ jest równy

A. 28 cm **B.** 40 cm **C.** 56 cm **D.** 64 cm

W przykładzie 10. uczeń najpierw ustalił długość odcinka *FC*, a następnie przerysował prostokąt tak, aby długość każdego boku prostokąta odpowiadała liczbie kratek, co pozwoliło bezbłędnie określić obwód czworokąta.

Przykład 10.

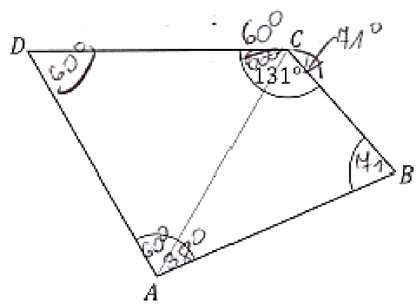
Brudnopis (*nie podlega ocenie*)



Kolejnym zadaniem, do którego rozwiązania uczniowie w dużej mierze wykorzystali rysunek jest zadanie 15. typu prawda-fałsz, w którym należało zastosować własności kątów i wielokątów do obliczenia miar dwóch wskazanych kątów wielokąta przedstawionego na rysunku.
W przykładzie 11. poprawne rozwiązanie w całości zostało umieszczone na rysunku.

Przykład 11.

(zobacz rysunek).

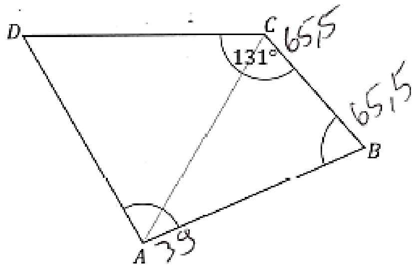


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt ABC ma miarę $60°$.	P	F
Kąt DAB ma miarę $98°$.	P	F

Prawie co czwarty uczeń uznał, że oba zdania są fałszywe. Błędna ocena prawdziwości dwóch zdań wynikała z niepoprawnego założenia, że przekątna *AC* jest dwusieczną kąta *BCD* i wykorzystania własności trójkąta równoramiennego, co zostało pokazane na rysunku w przykładzie 12.

Przykład 12.

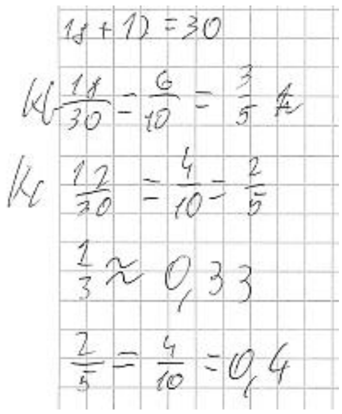


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Kąt ABC ma miarę 60°.	P	F
Kąt DAB ma miarę 98°.	P	F

W zadaniu 11. uczeń w celu dokonania oceny zdań, powinien przeanalizować proste doświadczenie losowe polegające na wyciąganiu jednej kuli spośród kul znajdujących się w urnie i na tej podstawie odpowiednio oszacować oraz obliczyć prawdopodobieństwa wyciągnięcia kul określonych kolorów. Z zapisów w brudnopisie wynika, że uczniowie w celu porównania prawdopodobieństwa wyciągnięcia kuli czarnej z podaną wartością liczbową zamieniali ułamki zwykłe na dziesiętne, tak jak pokazano w przykładzie 13.

Przykład 13.



W zadaniu 3. należało wskazać wyrażenie arytmetyczne, które dla podanych zmiennych przyjmuje określoną wartości liczbową. Zadanie to poprawnie rozwiązało 57% zdających. Najczęstszym błędem, który popełniło 26% ósmoklasistów było zaznaczenie wyrażenia oznaczonego literą K. Wybór ten wynika z błędów rachunkowych. W rozwiązaniu zadania w przykładzie 14. uczeń popełnił błąd przy obliczaniu różnicy liczb dodatniej i ujemnej.

Przykład 14.

K: $2x^2-2x$

$2\cdot1^2-2\cdot1=2-2=0$

$2\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)$

$2\cdot1-(-2)=2-(-2)=0$

W obliczeniach w przykładzie 15. uczeń również niepoprawnie wykonuje działania na liczbach całkowitych ujemnych.

Przykład 15.

$K=2x^2-2x=2\cdot(1)^2-2\cdot1=2\cdot1-2=2-2=0$

$2x^2-2x=2\cdot(-1)^2-2(1)=2\cdot1-2=2-2=0$

Zadanie 7., które było dla uczniów najtrudniejszym zadaniem spośród wszystkich zadań zamkniętych, polegało na uzupełnieniu dwóch zdań dotyczących działań na potęgach o wykładnikach całkowitych dodatnich. Poprawnie rozwiązało je 40% zdających. Zdecydowanie trudniejsze okazało się wybranie prawidłowego uzupełnienia drugiego zdania. Przykład 16. pokazuje prawidłowe rachunki prowadzące do obliczenia iloczynu potęg o wykładnikach całkowitych dodatnich.

Przykład 16.

$2^6\cdot(5^2)^3=2^6\cdot5^6=10^6$

Przykład 17. pokazuje niepoprawne rachunki, które doprowadziły do wybrania błędnego uzupełnienia pierwszego zdania.

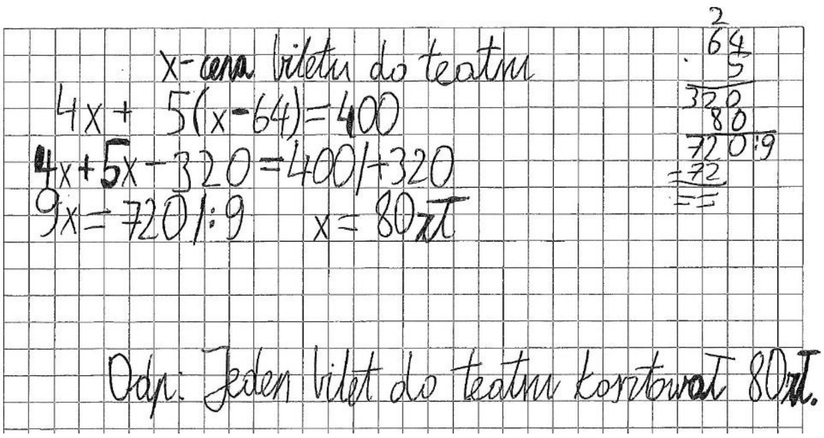
Przykład 17.

$\frac{10^8}{5^8}=\frac{(5^2)^8}{5^8}=\frac{5^{16}}{5^8}=5^8$

Zadanie 16., to zadanie otwarte, w którym problem osadzony był w kontekście praktycznym. Pierwszym etapem rozwiązania tego zadania była poprawna interpretacja informacji podanych w jego treści. Można to było zrobić, zapisując odpowiednie równanie lub równania lub wyrażenia arytmetyczne prowadzące do obliczenia ceny jednego biletu do teatru. Uczeń, który wykonał poprawne obliczenia oraz doprowadził rozwiązanie do końca, otrzymywał 2 punkty.

Przykłady: 18., 19. i 20. przedstawiają w pełni poprawne rozwiązania tego zadania. W przykładach 18. oraz 19. zdający ułożyli równanie z niewiadomą x oznaczającą cenę jednego biletu do teatru lub kina, natomiast w przykładzie 20. zdający ułożył dwa równania prowadzące do obliczenia ceny jednego biletu do teatru i ceny jednego biletu do kina.

Przykład 18.


x - cena biletu do teatru

$4x + 5(x-64) = 400$

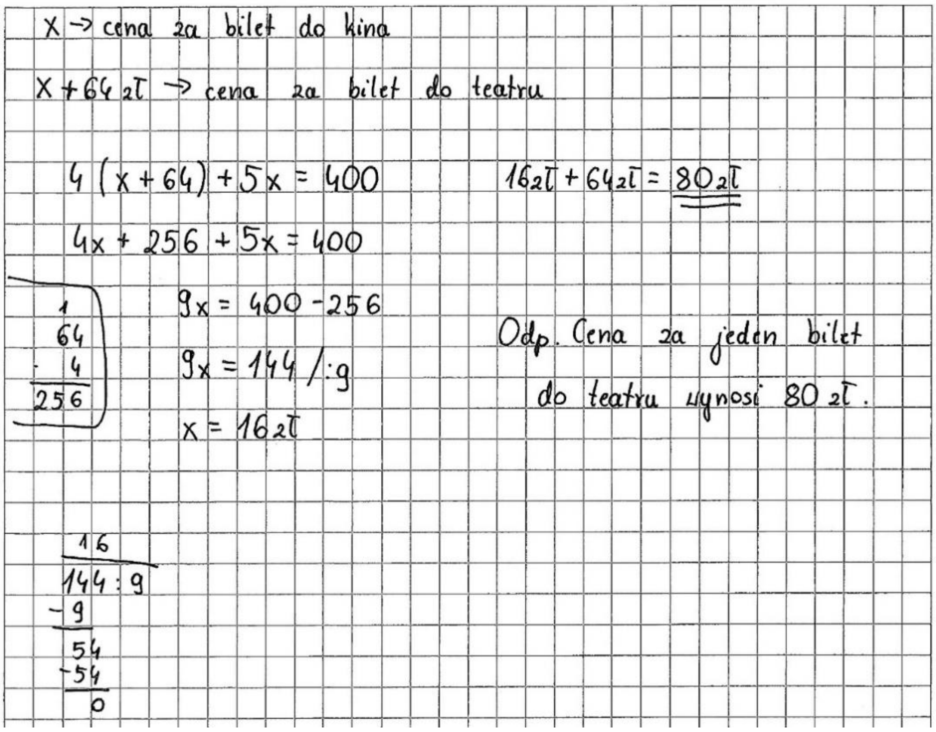
$4x + 5x - 320 = 400 \;/+320$

$9x = 720 \;/:9 \qquad x = 80$ zł

$64 \cdot 5 = 320$, $320 + 80$... $720 : 9$, -72

Odp: Jeden bilet do teatru kosztował 80zł.

Przykład 19.


$x \to$ cena za bilet do kina

$x + 64$ zł $\to$ cena za bilet do teatru

$4(x+64) + 5x = 400$

$4x + 256 + 5x = 400$

$9x = 400 - 256$

$9x = 144 \;/:9$

$x = 16$ zł

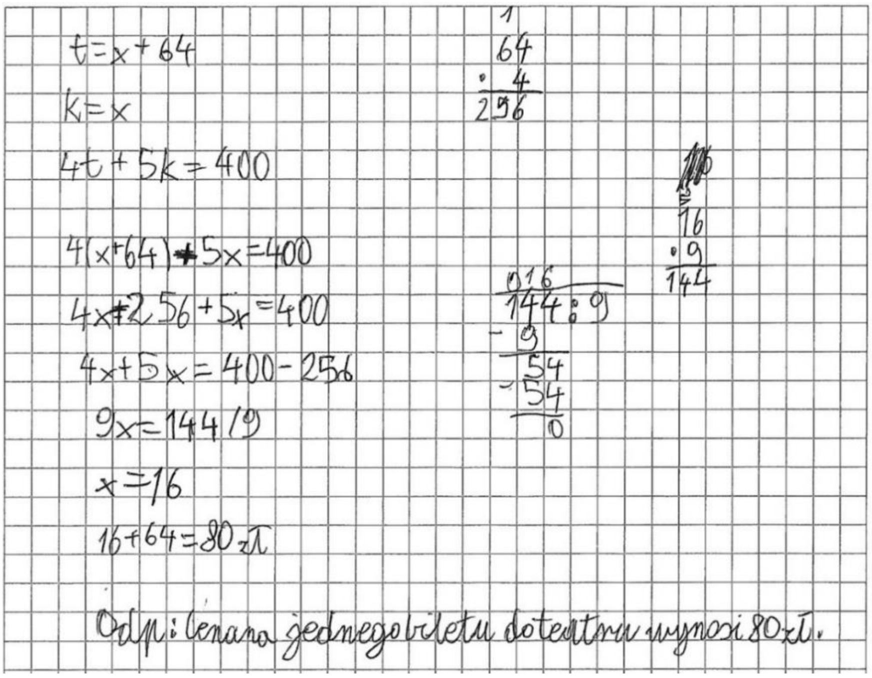
$64 \cdot 4 = 256$

$144 : 9 = 16$, -9, 54, -54, 0

16zł + 64zł = 80zł

Odp. Cena za jeden bilet do teatru wynosi 80 zł.

Przykład 20.



$t = x + 64$

$k = x$

$4t + 5k = 400$

$4(x+64) + 5x = 400$

$4x + 256 + 5x = 400$

$4x + 5x = 400 - 256$

$9x = 144 \quad /:9$

$x = 16$

$16 + 64 = 80$ zł

$64 \cdot 4 = 256$

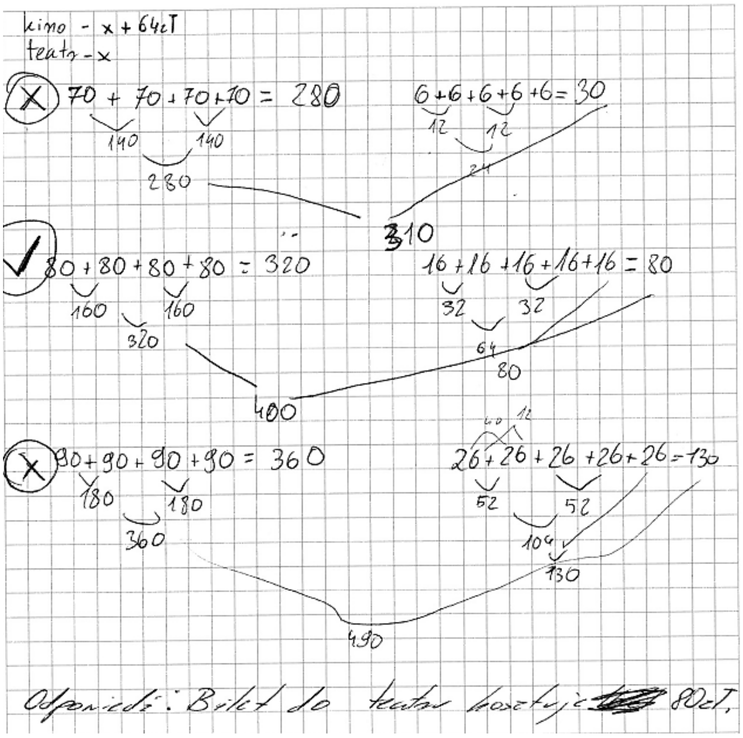
$144 : 9 = 16$

$16 \cdot 9 = 144$

Odp: Cena na jednego biletu do teatru wynosi 80 zł.

Inny poprawny sposób rozwiązania ilustruje przykład 21. Dla trzech par liczb uczeń sprawdził wszystkie trzy warunki zadania: (1) zadaną relację między ceną biletu do teatru i ceną biletu do kina, (2) koszt zakupu 4 biletów do teatru i 5 biletów do kina oraz łączny koszt zakupu biletów do kina i teatru oraz (3) udzielił poprawnej odpowiedzi. Za takie rozwiązanie otrzymał 2 punkty.

Przykład 21.



kino - x + 64 zł

teatr - x

$70 + 70 + 70 + 70 = 280$

$6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$

310

$80 + 80 + 80 + 80 = 320$

$16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 80$

400

$90 + 90 + 90 + 90 = 360$

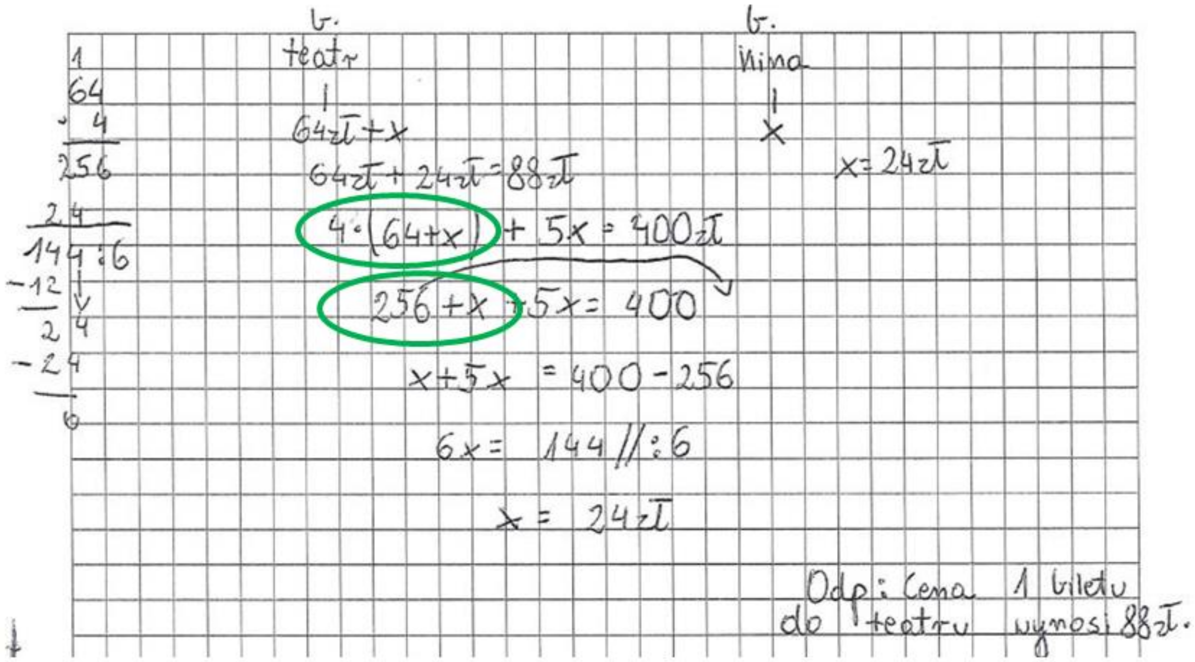
$26 + 26 + 26 + 26 + 26 = 130$

490

Odpowiedź: Bilet do teatru kosztuje 80 zł.

Uczniom, którzy za swoje rozwiązania uzyskali 1 punkt, do pełnego rozwiązania brakowało poprawnego przekształcenia równania, co ilustruje przykład 22., lub poprawności rachunkowej (przykład 23.), lub obu elementów, tak jak w przykładzie 24.

Przykład 22.



b. teatr – $64zł + x$

b. kina – x

$x = 24zł$

$64 \cdot 4 = 256$

$144 : 6 = 24$

$64zł + 24zł = 88zł$

$4 \cdot (64+x) + 5x = 400zł$

$256 + x + 5x = 400$

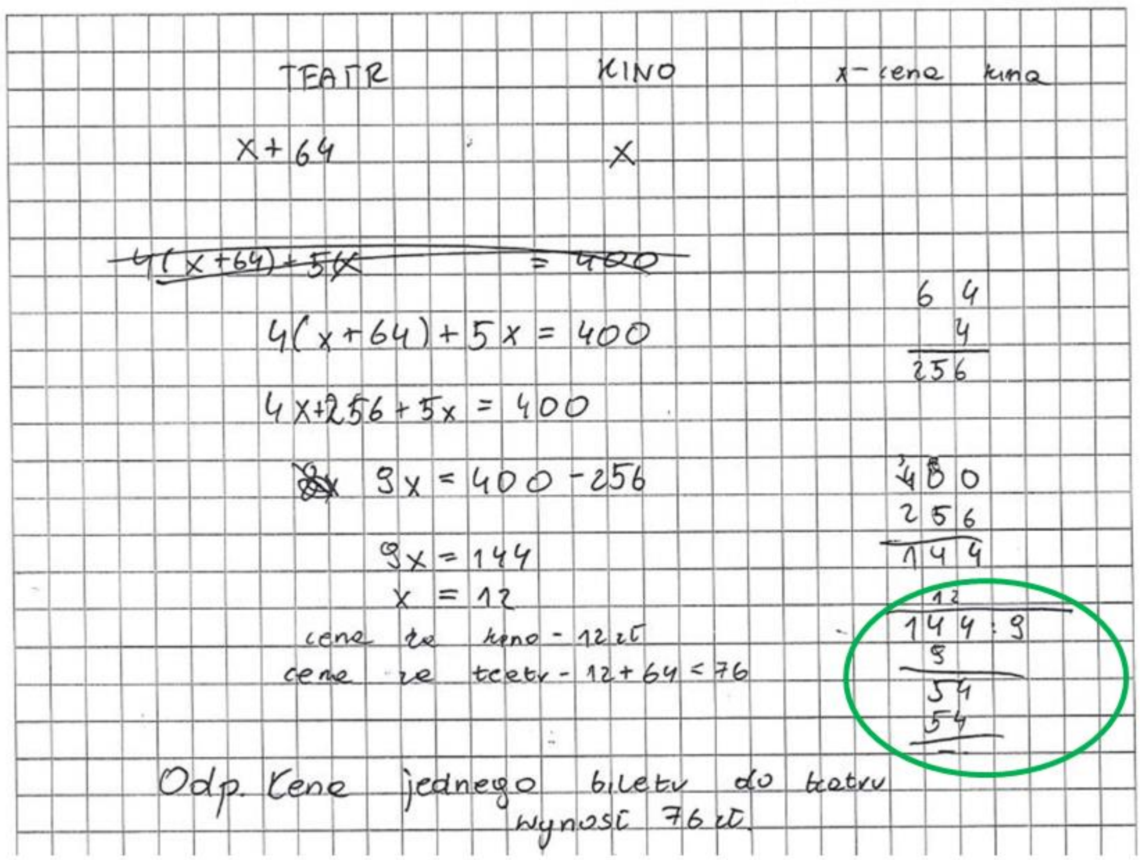
$x + 5x = 400 - 256$

$6x = 144 \quad //:6$

$x = 24zł$

Odp: Cena 1 biletu do teatru wynosi 88zł.

Przykład 23.



TEATR – $x+64$

KINO – x

x – cena kina

~~4(x+64)+5x = 400~~

$4(x+64)+5x = 400$

$4x+256+5x = 400$

$\cancel{8x}\ 9x = 400-256$

$9x = 144$

$x = 12$

cena za kino – 12 zł

cena za teatr – 12 + 64 = 76

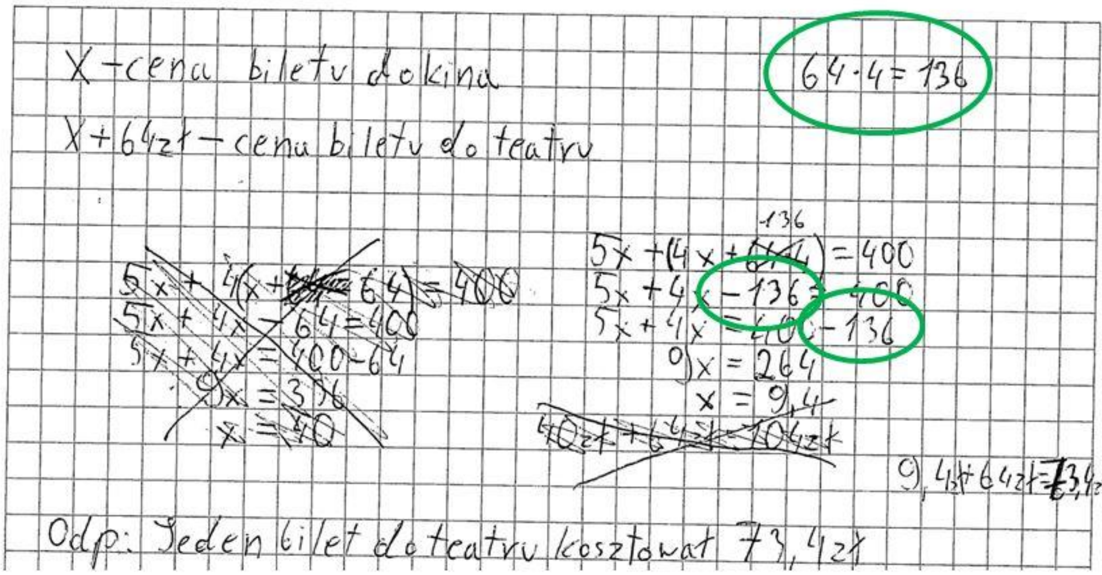
$64 \cdot 4 = 256$

$400 - 256 = 144$

$144 : 9 = 12$

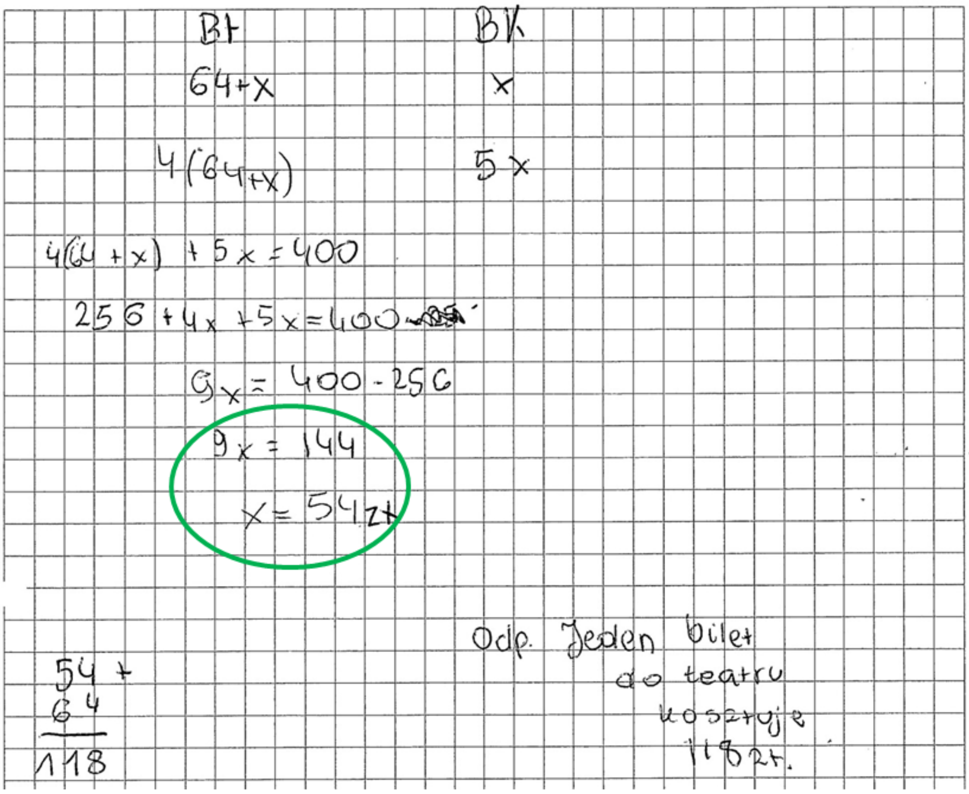
Odp. Cena jednego biletu do teatru wynosi 76 zł.

Przykład 24.



Powodem nieuzyskania pełnej punktacji były błędne obliczenia w pamięci (przykłady 25. i 26.) lub błędy w przepisywaniu (przykład 27.)

Przykład 25.



Przykład 26.

bilet do teatru – $x+64$

bilet do kina – $x = 15$ zł

$x+64+x+64+x+64+x+64+x+x+x+x+x=400$ zł

$$\begin{array}{r} 64 \\ \cdot\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

$400-256=144$

$15+64=79$

Odp. Bilet do teatru kosztuje 79 zł

Przykład 27.

x – cena biletu do kina

$x+64$ – cena biletu do teatru

$$\begin{array}{r} 64 \\ \cdot 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

$4(x+64)+5x=400$ zł

$4x+265+5x=400$ zł

$9x+265=400$ zł $/-265$

$9x=135$ $/:9$

$x=15$ zł

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 135:9 \\ -9 \\ \hline 45 \end{array}$$

15 zł + 64 zł = 79 zł

Odp. Cena biletu do teatru wynosi 79 zł

Wśród rozwiązań, za które uczniowie uzyskali 0 punktów, pojawiały się niepoprawnie zapisane równania (przykłady 28. i 29.) lub błędne wyrażenia arytmetyczne, które nie prowadziły do obliczenia ceny jednego biletu do teatru lub ceny jednego biletu do kina (przykłady 30. i 31.).

W rozwiązaniu przedstawionym w przykładzie 28. uczeń ułożył niepoprawne równanie, w którym zabrakło nawiasu przy wyrażeniu algebraicznym opisującym kwotę, którą trzeba zapłacić za 4 bilety do teatru.

Przykład 28.

x – cena biletu do kina

y – cena biletu do teatru

$y = 64 + x$

$4y + 5x = 400$

$\boxed{4 \cdot 64 + x} + 5x = 400$

$256 + x + 5x = 400$

$256 + 6x = 400$

$400 - 256 = 6x$

$144 = 6x$

$6x = 144 \,/ :6$

$x = 24$

$y = 64 + 24$

$y = 88$ zł

$64 \cdot 4 = 256$

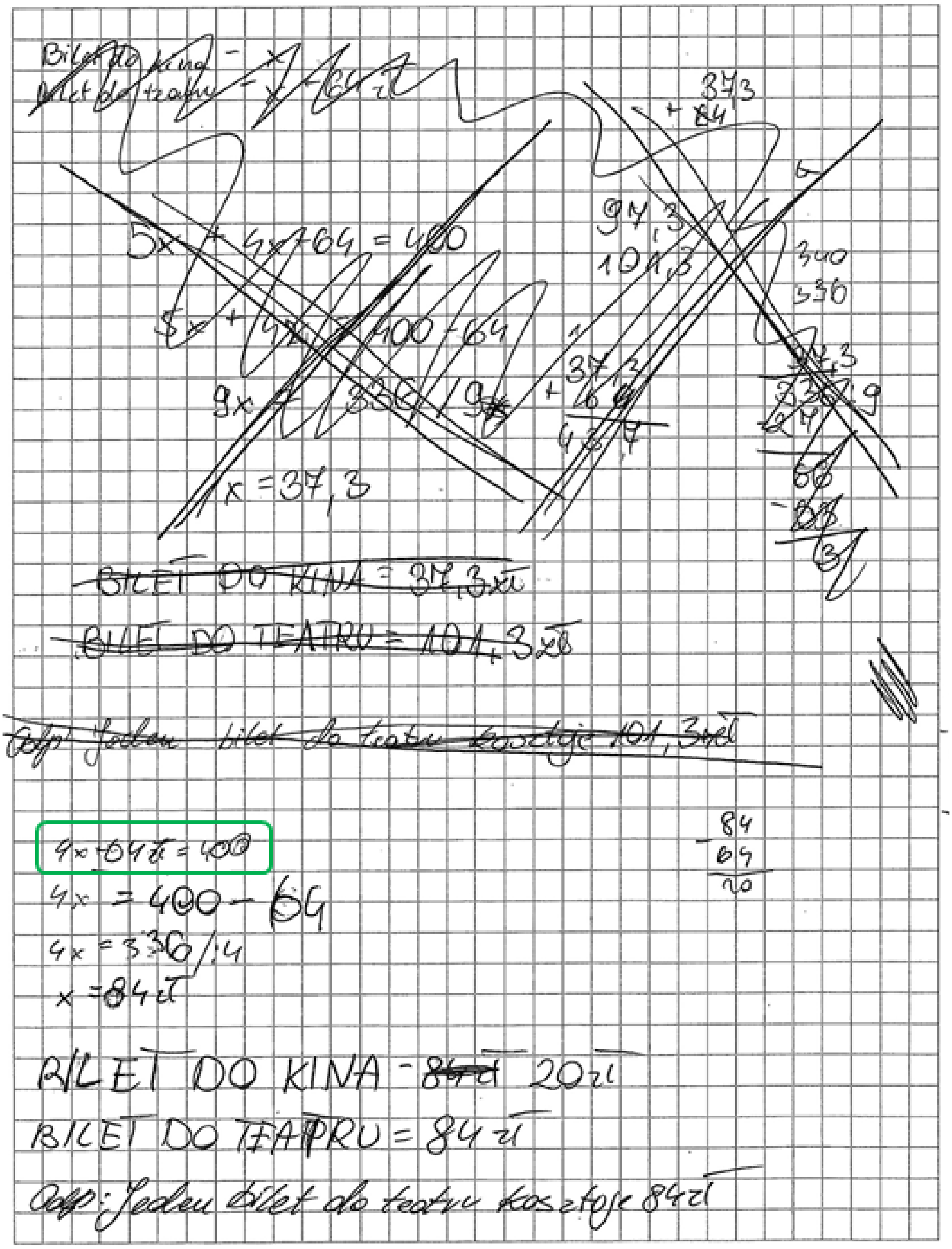
$144 : 6 = 24$

$64 + 24 = 88$

Odp.: Cena jednego biletu do teatru wynosi 88 zł.

W przykładzie 29. zdający ułożył niepoprawne równanie: nie uwzględnił kwoty, jaką trzeba zapłacić za bilety do kina oraz nie użył nawiasu przy zapisie wyrażenia opisującego kwotę, którą trzeba zapłacić za 4 bilety do teatru.

Przykład 29.



$4x + 64 zł = 400$

$4x = 400 - 64$

$4x = 336 /:4$

$x = 84 zł$

BILET DO KINA - ~~84 zł~~ 20 zł

BILET DO TEATRU = 84 zł

Odp: Jeden bilet do teatru kosztuje 84 zł

W przykładzie 30. ósmoklasista w rozwiązaniu zapisał wyrażenia, które nie prowadzą do obliczenia ceny jednego biletu do teatru. Uczeń, aby otrzymać szukaną cenę biletu do teatru, powinien do 400 zł dodać 320 zł i otrzymany wynik podzielić przez 9.

Przykład 30.

$64 \cdot 5 = 320$

$400 - 320 = 80$

$80 : 4 = 20$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 320 \end{array}$$

Odp. Bilet do teatrze za jedną osobę kosztuje 20 zł

W kolejnym przykładzie (przykład 31.) uczeń również zapisał niepoprawne wyrażenia arytmetyczne. Aby otrzymać cenę jednego biletu do kina, powinien otrzymany wynik 144 zł podzielić przez 9.

Przykład 31.

$64 \cdot 4 = 256$

$400 - 256 = 144$

$144 : 5 = 28$

$\cancel{28 \cdot 5 = 140}$

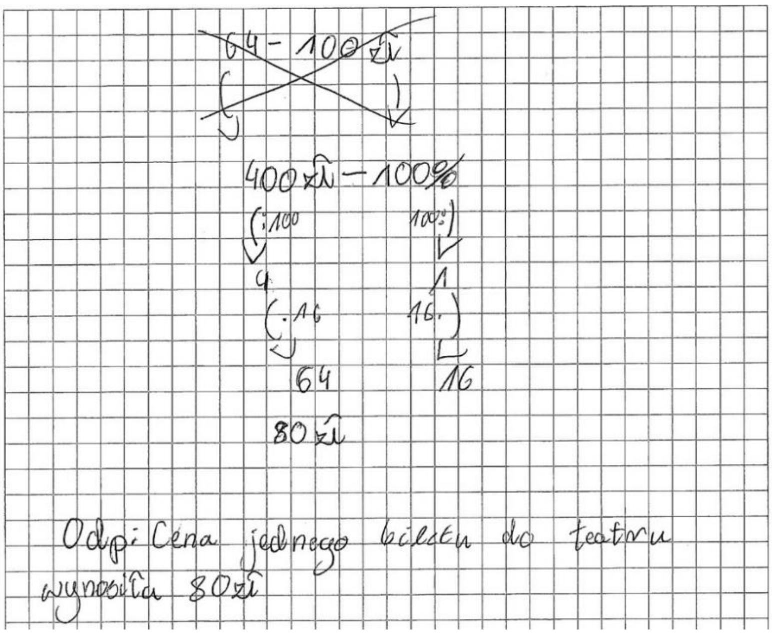
$28 \cdot 4 = 82$

Odp: Cena jednego biletu do teatru to 82 zł.

Niektórzy uczniowie próbowali ustalić metodą prób i błędów cenę jednego biletu do teatru i cenę jednego biletu do kina, lecz nie sprawdzali wszystkich warunków zadania i w konsekwencji otrzymywali błędne ceny. Wśród rozwiązań znalazły się też takie, w których uczniowie niepoprawnie zinterpretowali treść zadania.

W przykładzie 32. uczeń obliczył, że 64 zł to 16% łącznej ceny wszystkich biletów. Prawdopodobnie po dodaniu obu wielkości (64 zł i 16%) uzyskał wartość 80 zł, która wynika jednak z błędnej metody ustalania ceny biletu do teatru.

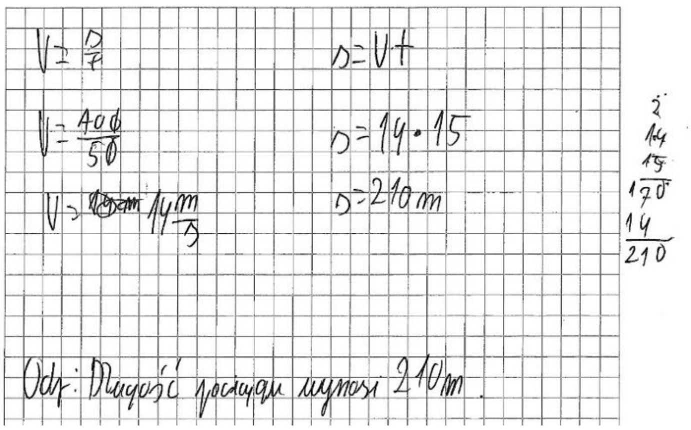
Przykład 32.



Zadanie 17. wymagało umiejętności obliczania prędkości przy danej drodze i czasie oraz drogi przy danym czasie i prędkości. Zadaniem ucznia było obliczenie długości pociągu, równej długości odcinka drogi, którą przejedzie ten pociąg ze stałą prędkością w określonym czasie. Uczniowie za doprowadzenie rozwiązania zadania do końca i bezbłędne obliczenia otrzymywali 2 punkty.

Przykłady 33., 34., 35. pokazują najczęściej stosowane przez zdających sposoby rozwiązania zadania, czyli z zastosowaniem poprawnego związku między prędkością a drogą całkowitą i czasem lub zastosowaniem poprawnego związku między drogami przebytymi w określonym czasie z wykorzystaniem własności wielkości wprost proporcjonalnych.

Przykład 33.



Przykład 34.

700 m → 50 s

x → 15 s

$$X = \frac{70\cancel{0}\,m \cdot \cancel{15}^{3}\,\cancel{s}}{\cancel{5}_{1}\cancel{0}\,\cancel{s}}$$

$X = 210$ m

Odp. Pociąg ten ma długość 210 m.

Przykład 35.

m – s

700 – 50

14 – 1

210 – 15

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 15 \\ \hline 70 \\ +\ 14 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \hline 70:5 \\ -5 \\ \hline 20 \end{array}$$

Odp: Pociąg ten ma 210 m długości

Przykład 36. pokazuje jeszcze inny sposób rozwiązania zadania z zastosowaniem wielkości wprost proporcjonalnych. Uczeń obliczył, jakim procentem 50 sekund jest 15 sekund, a następnie obliczył taki sam procent długości drogi przebytej przez pociąg.

Przykład 36.

100% – 50 sekund 100% – 700 metrów

10% – 5 sekund 10% – 70 metrów

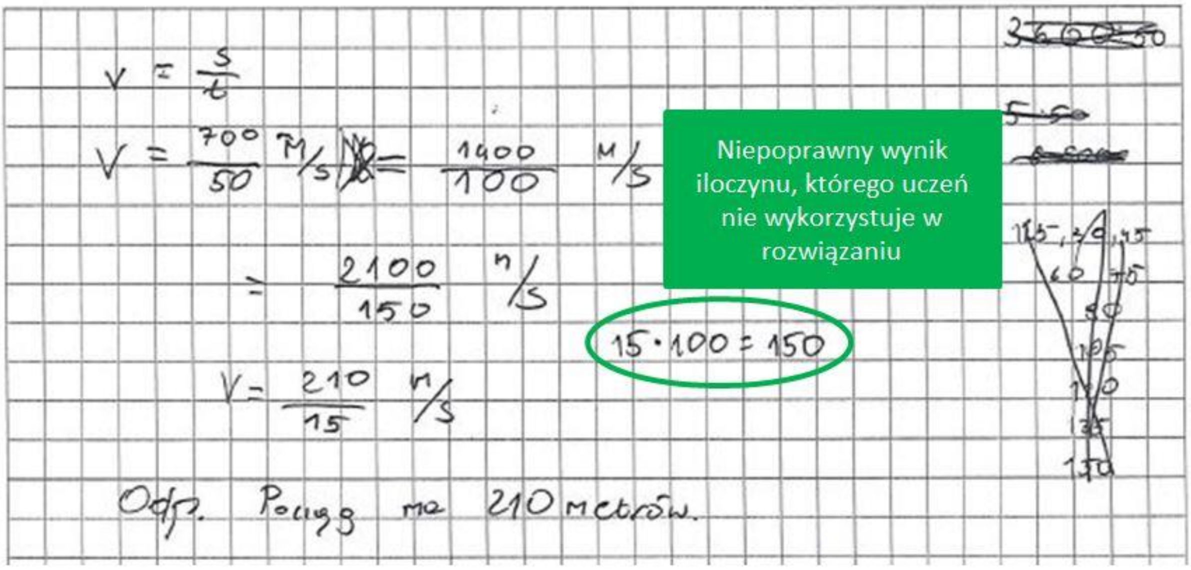
20% – 10 sekund 20% – 140 metrów

30% – 15 sekund 30% – 210 metrów

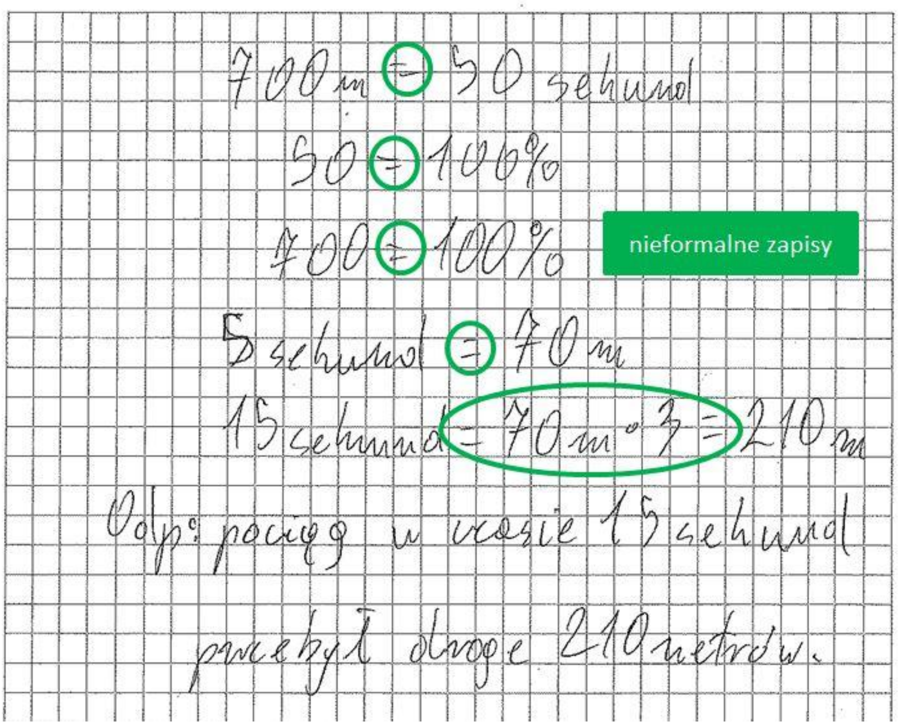
Odp. Długość pociągu jest równa 210 metrów.

W rozwiązaniach ocenionych na maksymalną liczbę punktów zdarzały się usterki, które nie miały wpływu na ocenę rozwiązań, np. popełnienie błędu rachunkowego przy działaniu, którego uczeń nie wykorzystuje w rozwiązaniu problemu postawionego w zadaniu (przykład 37.) lub stosowanie nieformalnego zapisu (przykład 38.).

Przykład 37.

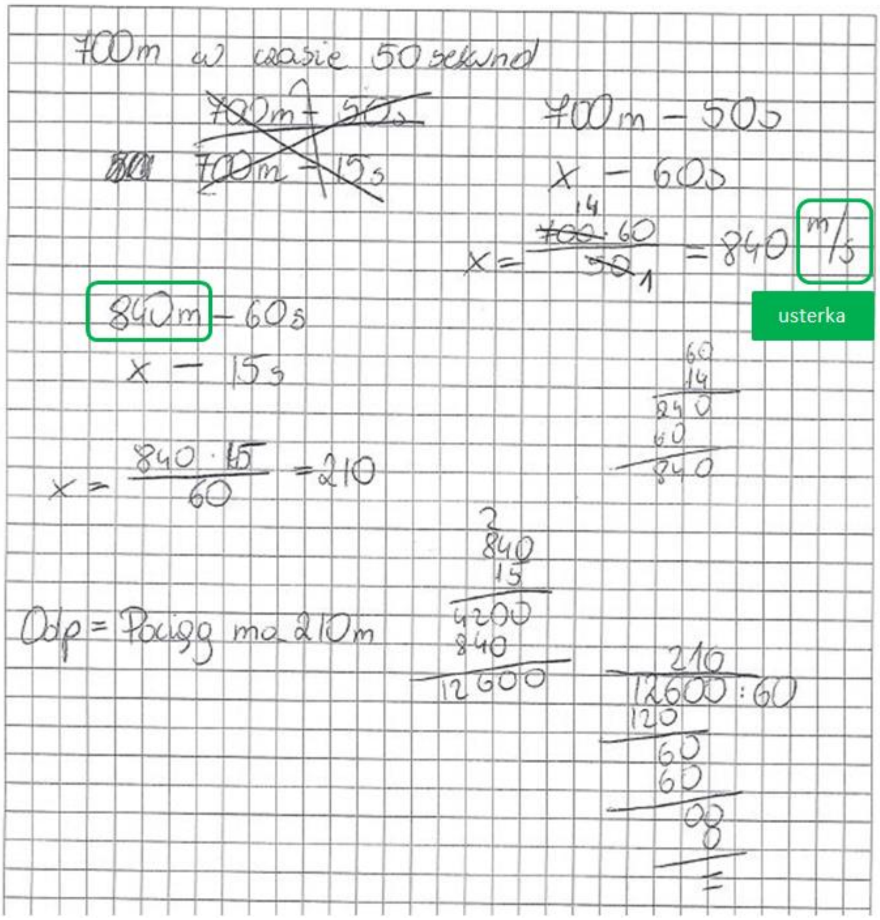


Przykład 38.



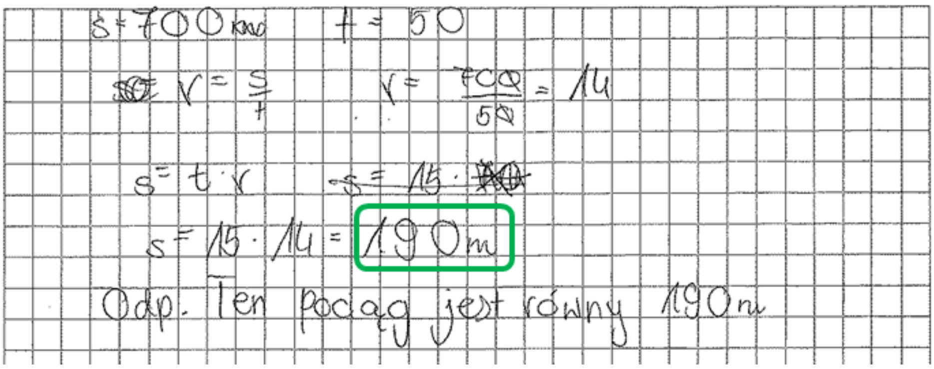
W przykładzie 39. uczeń niepoprawnie zapisał jednostkę przy obliczaniu drogi, którą pociąg przejedzie w czasie 60 sekund (1 minuty). Przy obliczeniach długości pociągu skorygował błąd i poprawnie zinterpretował obliczoną wartość 840 m.

Przykład 39.



Uczniom, którzy za swoje rozwiązania uzyskali 1 punkt, do pełnego rozwiązania zabrakło poprawności rachunkowej (przykłady 40., 41., 42.)

Przykład 40.



Przykład 41.

$\frac{700m}{50s} \times \frac{x}{15s}$

$50x = 700 \cdot 15$

$5x = 70 \cdot 15$

$5x = \boxed{1050 /:5}$

$x = \boxed{260 m}$

260m

Odp: Długość tego pociągu wynosi 260m

$$\begin{array}{r} 70 \\ \cdot 15 \\ \hline 350 \\ 70 \\ \hline 1050 \end{array}$$

Przykład 42.

700 metrów = 50 sekund

x – jego długość = 15 sekund

$700 - 50$

$x - 15$

$x = \frac{70\cancel{0} \cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1}\cancel{0}}$

skracanie przez 10

$x = 700 \cdot 3$

$x = 2100 m$

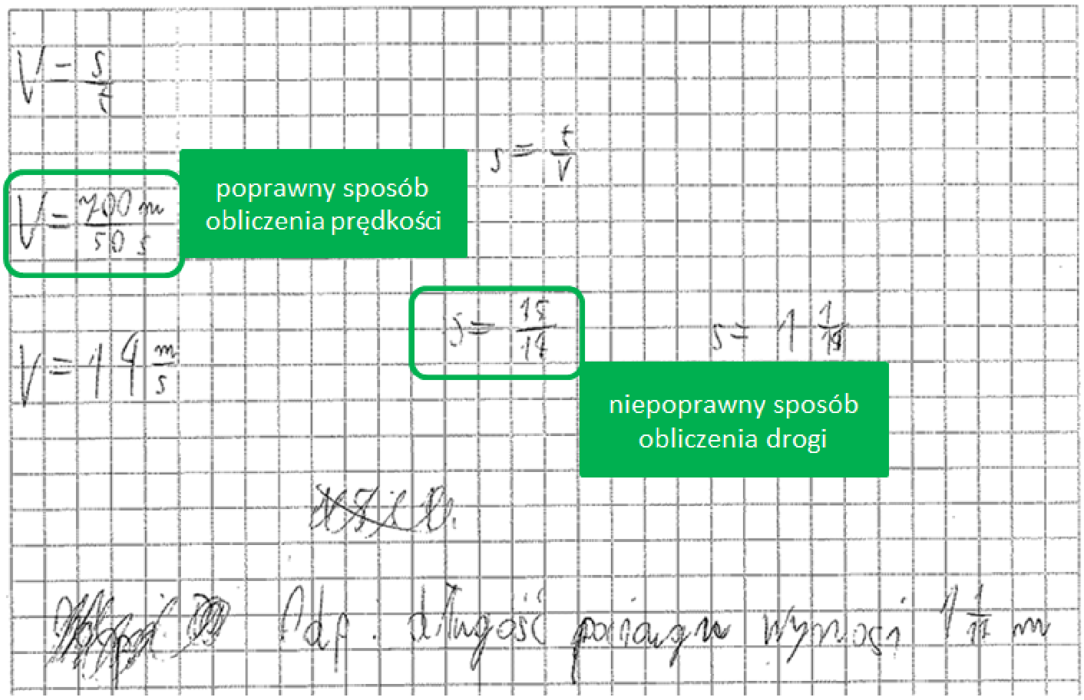
$$\begin{array}{r} 700 \\ \times 3 \\ \hline 2100 \end{array}$$

odp: Długość pociągu jest równa 2100 metrów.

Wśród rozwiązań, za które uczniowie uzyskali 0 punktów pojawiały się takie, w których zdający próbowali obliczyć długość pociągu, ale nie zastosowali poprawnych zależności między prędkością, drogą całkowitą i czasem (przykład 43.) oraz takie, w których niepoprawnie interpretowali dane w zadaniu (przykłady 44., 45.).

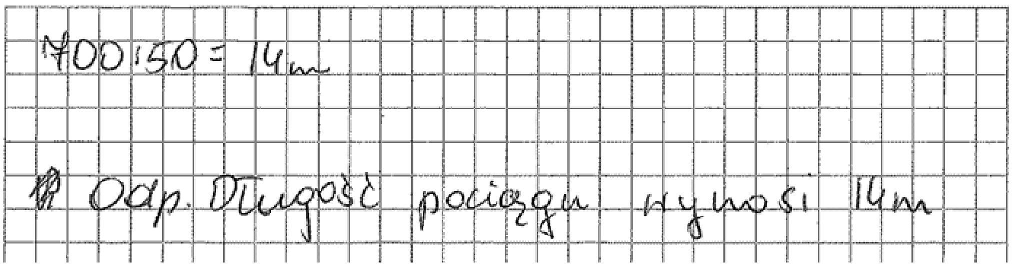
W przykładzie 43. zdający zastosował poprawny sposób obliczenia prędkości, z jaką jechał pociąg, i niepoprawny sposób obliczenia drogi. Aby uzyskać 1 punkt, uczeń powinien zastosować oba poprawne sposoby obliczenia.

Przykład 43.



W przykładzie 44., zdający, dzieląc 700 metrów przez 50 sekund, w poprawny sposób obliczył prędkość, z jaką jechał pociąg. Wynik niepoprawnie zinterpretował jako długość pociągu.

Przykład 44.



Prezentowany poniżej przykład 45. ilustruje błędną interpretację danych zawartych w zadaniu.

Przykład 45.

$700 \cdot 50 = 7000$ metrów $: 2 =$ 3000 metra

Pociąg miał 3000 metrów

$$\begin{array}{r} 700 \\ \cdot\ 50 \\ \hline 35000 \end{array}$$

W zadaniu 18. należało wykorzystać informacje o polu czworokąta i długości jego przekątnej do obliczenia wysokości jednego z dwóch trójkątów utworzonego przez boki czworokąta i jego przekątną. Do osiągnięcia sukcesu niezbędne było obliczenie pola trójkąta, którego wysokość była dana, a następnie wykorzystanie do dalszych obliczeń faktu, że pole czworokąta jest równe sumie pól dwóch powstałych trójkątów. W ten sposób uczeń uzyskiwał szukaną wysokość drugiego trójkąta.
Doprowadzenie rozwiązania zadania do końca i bezbłędne wykonanie obliczeń zapewniało uzyskanie trzech punktów.

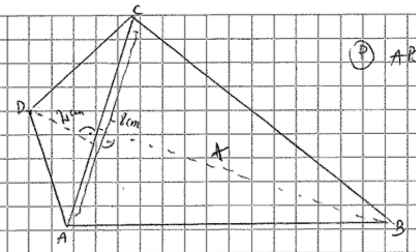
Przykłady 46. i 47. ilustrują w pełni poprawne rozwiązania za 3 punkty. W tych rozwiązaniach uczniowie przedstawili

1) poprawny sposób obliczenia pola trójkąta *ACD*

2) poprawny sposób obliczenia pola trójkąta *ABC* (jako różnicy pól czworokąta *ABCD* i trójkąta *ACD*)

3) poprawne obliczenia wysokości trójkąta *ABC* z wykorzystaniem wzoru na jego pole.

Przykład 46.



Ⓟ ABCD = 48cm²

Pole <ACD> = $\frac{2 \cdot 8}{2}$ = 8 cm² 1)

Pole < ABC > = 48cm² − 8cm² = 40cm² 2)

obliczam h(x) ABC

spr: $\frac{8 \cdot 10}{2}$ = 40cm²

3) $\frac{8 \cdot x}{2} = \frac{8x}{2} = 4x$

~~4x = 40cm² | :4~~

4x = 40 | :4

x = 10 cm

Odp: wysokość trójkąta ABC wynosi 10cm.

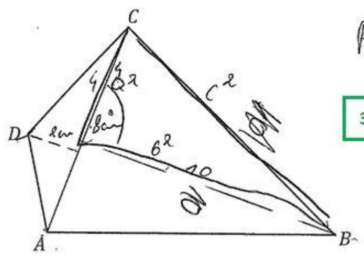
Przykład 47.

$\frac{a \cdot h}{2}$

$\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$

Pc = 48cm²

3) $\frac{8 \cdot 10}{2} = \frac{80}{2} = 40$



Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka B do prostej AC.
Zapisz obliczenia.

~~h~~

h acd = 2cm
AC = 8cm
P ABCD = 48cm²
P ACD = 8
ABC = 40

pierw trzeba policzyć pole ACD:

1) $\frac{a \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$ pole = 8cm²

teraz odjąć pole ACD od pola całej figury 48 − 8 = 40

2) 48cm² − 8cm² = 40cm²

teraz coś podzielone przez dwa musiało mam 40
3) czyli 80 podstawa to 8 więc wysokoś musi być 10
~~teraz trzeba skorzystać z twierdzenia pitagorasa~~

$4^2 + 10^2 = c^2$ $a^2 + b^2 = c^2$

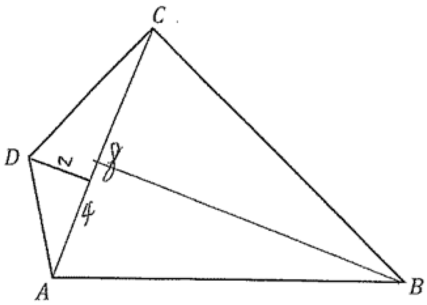
$16 + 100 = c^2$

$116 = c^2$

Odpowiedź: Wysokość wynosi 10cm

W przykładzie 48. uczeń zastosował poprawny sposób obliczenia wysokości trójkąta *ABC*, poprawnie obliczył wysokość tego trójkąta i rozwiązanie zadania doprowadził do końca, ale zapisał niepoprawną jednostkę w wyniku końcowym.

Przykład 48.



Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka B do prostej AC.
Zapisz obliczenia.

$P_{ACD} = \frac{8 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 8cm^2$ 1) $\quad 48cm^2 - 8cm^2 = 40cm^2$ 2)

$P_{ABCD} = 48cm^2$

$P_{ABC} = \frac{8 \cdot h}{2} \quad P_{ABC} = 40cm^2$

$40cm^2 = \frac{\cancel{8}^{4} \cdot h}{\cancel{2}_{1}}$ 3)

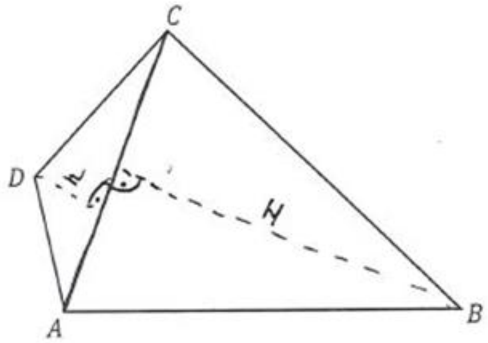
$40 : 4 = h$

$10 = h$

Odp: Wysokość trójkąta ABC jest równa $10\boxed{cm^2}$

Uczniom, którzy za swoje rozwiązania uzyskali 2 punkty, często, do pełnego rozwiązania zabrakło poprawności rachunkowej, co ilustruje przykład 49.

Przykład 49.



Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka B do prostej AC.
Zapisz obliczenia.

$P = 48\ cm^2$

$AC = 8\ cm$

ABC i ACD

$h|ACD| = 2cm$

$P = \frac{a \cdot h}{2}$

$P_{ACD} = \boxed{\frac{8 \cdot \cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}} = 4}\ cm^2$

błąd rachunkowy

$48 - 4 = 44$

$P_{ABC} = 44\ cm^2$

$44 = \frac{\cancel{8}^{4} \cdot H}{\cancel{2}_{1}}$

$44 = 4 \cdot H \ /:4$

$\frac{44}{4} = H$

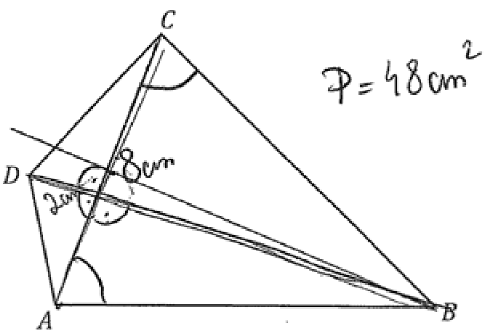
$H = 11$

Odp. Wysokość trójkąta $ABC = 11$ cm

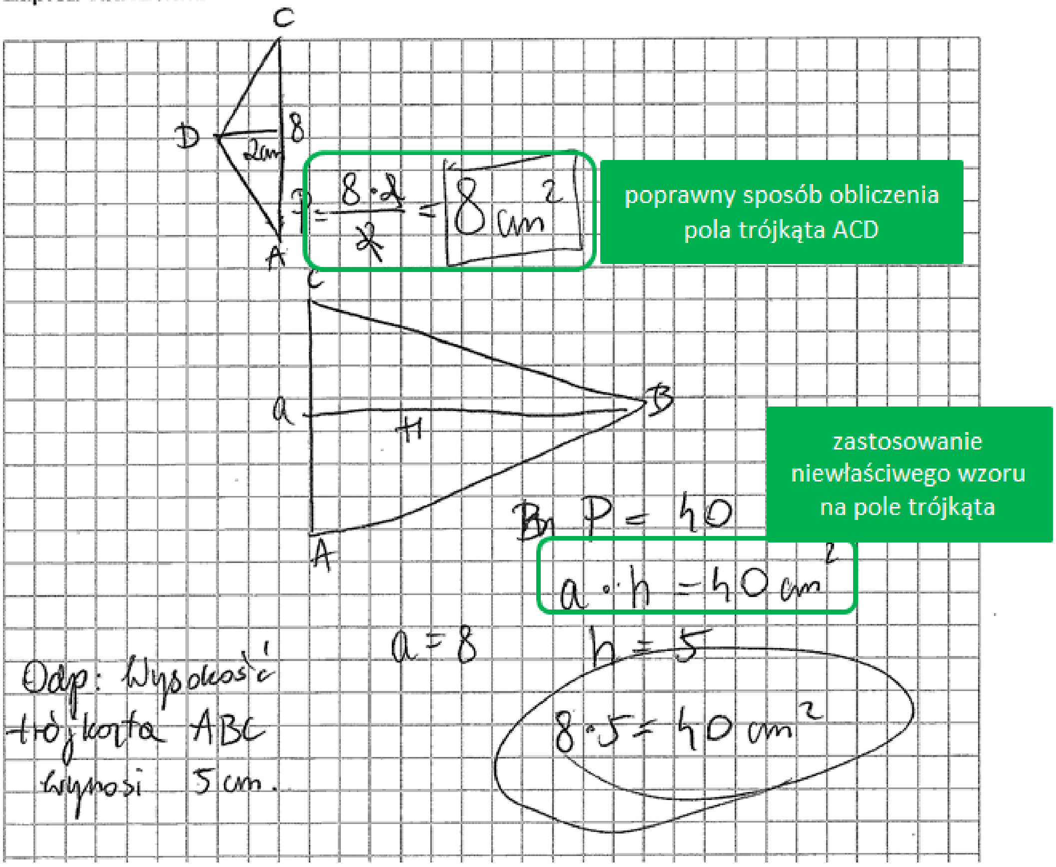
Uczniowie, którzy uzyskali 1 punkt za rozwiązanie tego zadania, dokonali jedynie istotnego postępu w rozwiązaniu zadania. Zastosowali poprawny sposób obliczenia pola trójkąta *ACD* lub zastosowali wzór na pole trójkąta *ABC* z poprawnie podstawioną daną, ale nie zdołali pokonać zasadniczej trudności zadania, tj. przedstawienia poprawnego sposobu obliczenia wysokości trójkąta *ABC*.

Przykłady 50. i 51. ilustrują rozwiązania, w których uczniowie dobrze obliczyli pole trójkąta *ACD*, ale nie potrafili poprawnie doprowadzić do końca rozwiązania zadania.

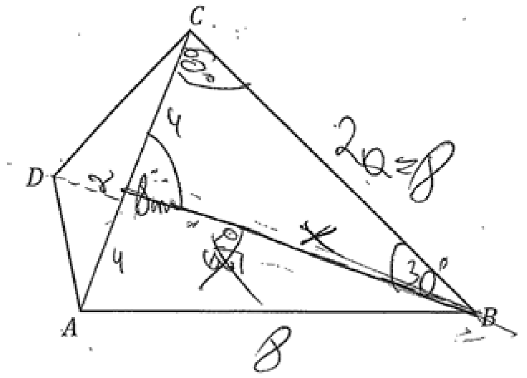
Przykład 50.



Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka B do prostej AC.
Zapisz obliczenia.



Przykład 51.



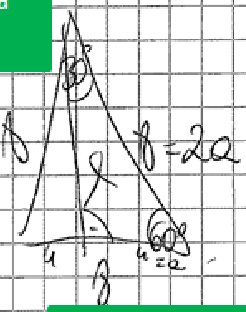
Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka B do prostej AC.
Zapisz obliczenia.

$P_{ABCD} = 48\ cm^2$

$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$

poprawny sposób obliczenia pola trójkąta ADC

$\cancel{48 - 8 = 40}$



$x = h$ $\quad x = a\sqrt{3}$

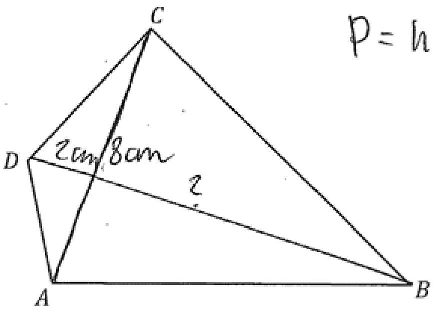
$h = 8\sqrt{3}$ cm

błędne założenie, że trójkąt ABC dzieli się na dwa trójkąty o kątach wewnętrznych 30˚, 60˚, 90˚

Odp. wysokość trójkąta wynosi $8\sqrt{3}$ cm.

W przykładzie 52. ósmoklasista wyznaczył pole trójkąta *ACD* z błędnej metody, ale zastosował wzór na pole trójkąta *ABC* z poprawnie podstawioną daną.

Przykład 52.



$P = 48\ cm^2$

Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka B do prostej AC.
Zapisz obliczenia.

niepoprawny sposób wyznaczenia pola trójkąta ACD

$P_{ADC} = 2 \cdot 8 = 16\ cm^2$

$48\ cm^2 - 16\ cm^2 = 32\ cm^2$

Odpowiedź: Wysokość trójkąta ABC jest równa 4 cm.

$P_{ACB} = 32\ cm^2$

$P = \frac{a \cdot h}{2}$

$32 = \boxed{\frac{8 \cdot h}{2}} \ /\cdot 2$

$64 = 8 \cdot 2h \ /:16$

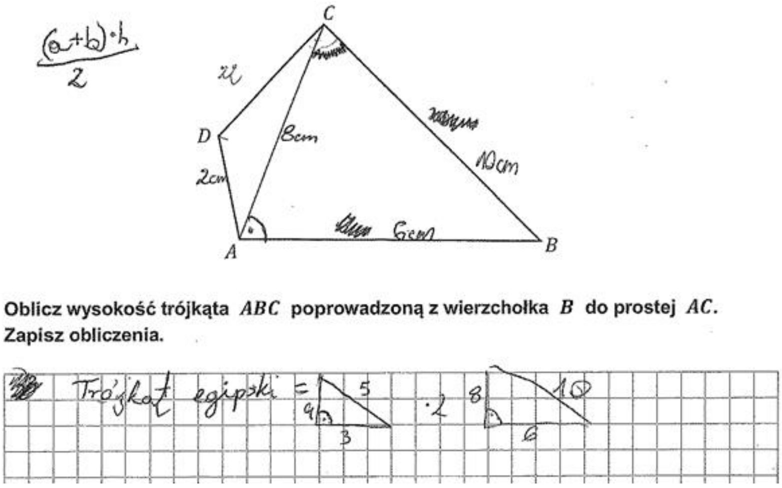
$h = \frac{64}{16} = 4\ cm$

zastosowanie wzoru na pole trójkąta ABC z poprawnie wstawioną daną 8 cm

Przykłady poniżej ilustrują rozwiązania uczniów, którzy nie poradzili sobie z postawionym w zadaniu problemem i błędnie interpretowali dane zawarte w zadaniu. Często próbowali w nieuzasadniony sposób zastosować twierdzenie Pitagorasa do obliczenia długości boków lub wysokości w trójkącie *ACD* lub *ABC*. Za rozwiązania prezentowane w przykładach 53., 54.,55., 56. uczniowie otrzymali 0 punktów.

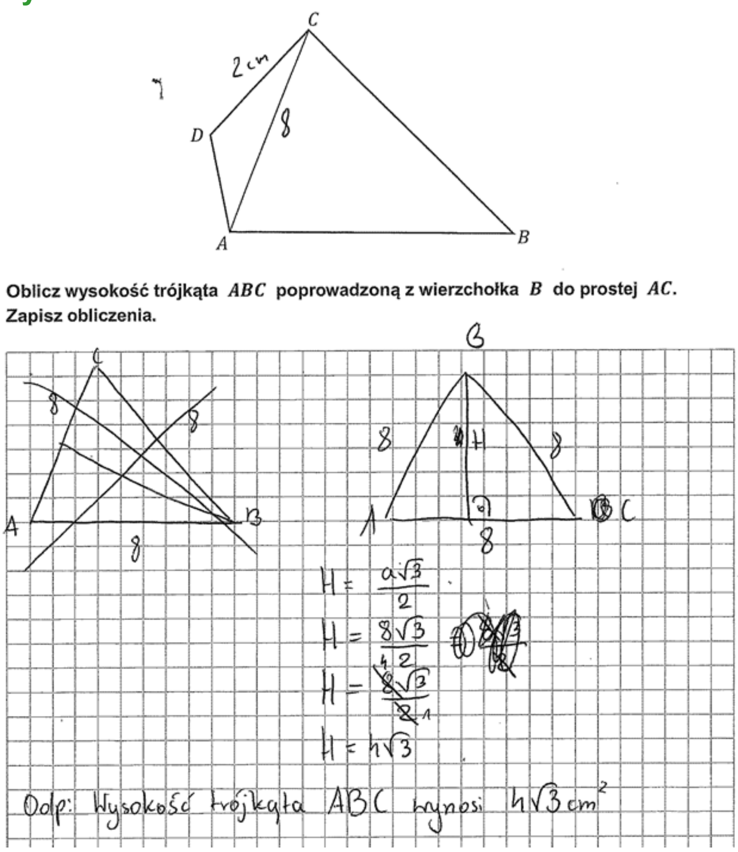
W przykładzie 53. uczeń błędnie założył, że trójkąt *ABC* jest trójkątem prostokątnym.

Przykład 53.



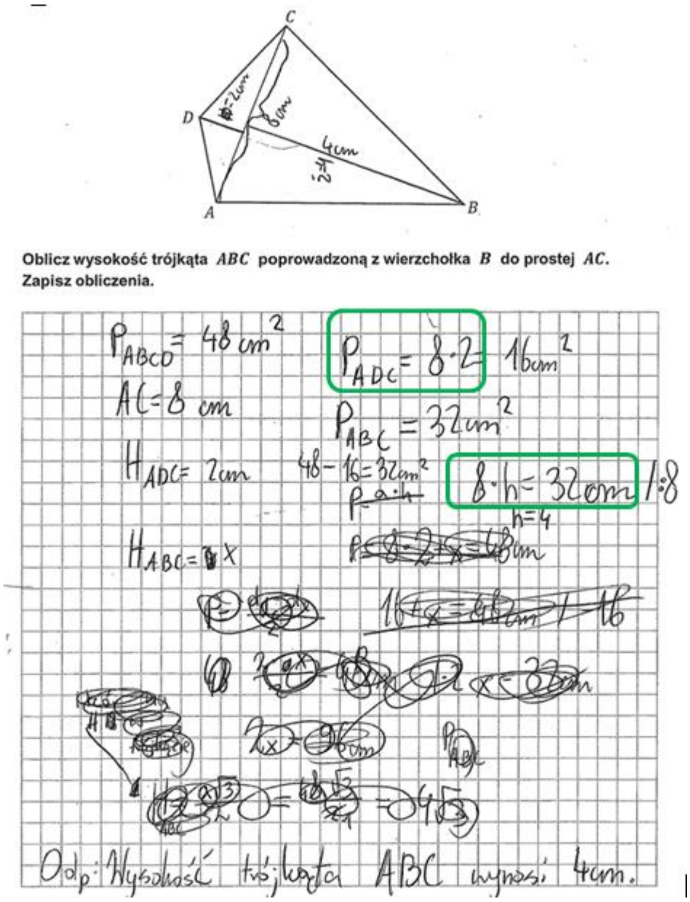
Wśród uczniowskich rozwiązań pojawiło się wiele, w których uczniowie błędnie zakładali, że trójkąt *ABC* jest równoboczny. Przykład 54. ilustruje takie rozwiązania.

Przykład 54.



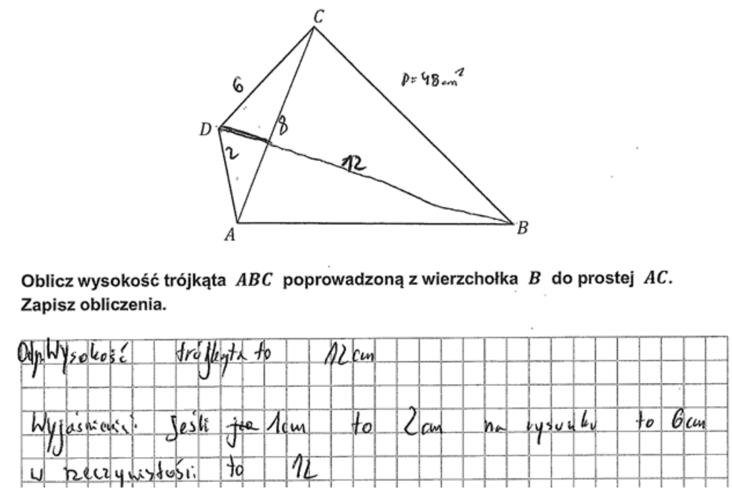
Przykład 55. ilustruje rozwiązanie, w którym uczeń zastosował niepoprawny wzór na pole trójkąta, co skutkowało otrzymaniem przez niego 0 pkt za zadanie.

Przykład 55.



Zdarzały się również rozwiązania oparte na pomiarze długości odcinków w trójkątach linijką. Przykład 56. jest ilustracją tego typu rozwiązania.

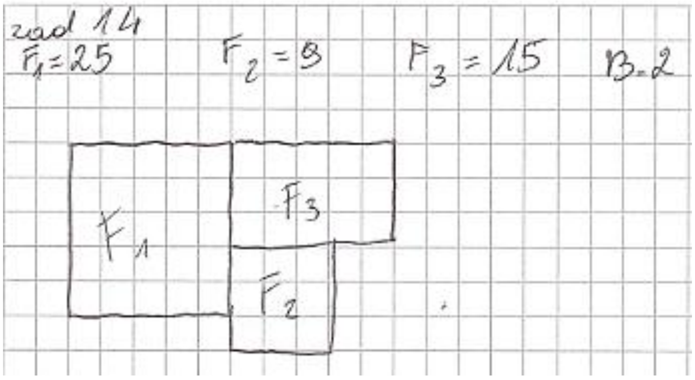
Przykład 56.



W zakresie **rozumowania i argumentacji** badano następujące kompetencje ósmoklasistów: przeprowadzanie prostego rozumowania i podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania (zadanie 14.), formułowanie wniosków na podstawie zauważonych regularności, podobieństw i analogii (zadanie 13.) oraz tworzenie strategii rozwiązania problemu w rozwiązaniach wieloetapowych (zadanie 6. i zadanie 19.).

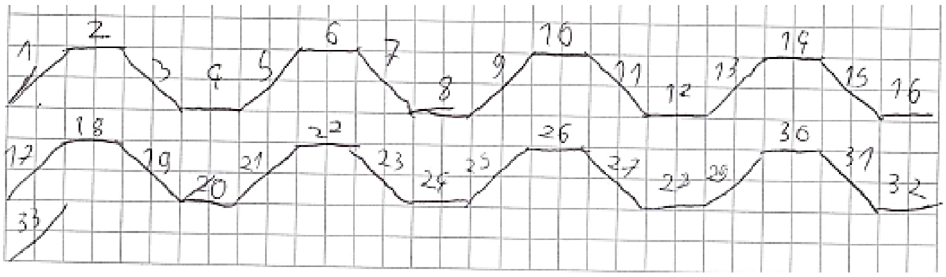
W zadaniu 14. należało określić, czy z trzech przedstawionych na rysunku figur można ułożyć, bez rozcinania tych figur, kwadrat o określonym polu i dobrać uzasadnienie wyboru spośród trzech podanych. W poszukiwaniu prawidłowej odpowiedzi, którą wybrało 63% zdających, uczniowie często wspomagali się rysunkiem w brudnopisie. Dla 24% uczniów, argumentem popierającym nieprawidłową odpowiedź twierdzącą, była równość sumy pól trzech figur i pola kwadratu. W przykładzie 57. uczeń próbuje trzy czworokąty o określonych długościach boków ułożyć w kwadrat.

Przykład 57.



W zadaniu 13. problem odnosił się do wskazywania odcinków prostopadłych i równoległych w pewnej figurze na podstawie jej fragmentu. Blisko połowa uczniów udzieliła prawidłowej odpowiedzi. Do rozwiązania zadania można było wykorzystać działania na liczbach naturalnych, jednak uczniowie swoje odpowiedzi opierali przede wszystkim na dorysowaniu brakującej części figury i ponumerowaniu kolejnych odcinków (przykład 58.).

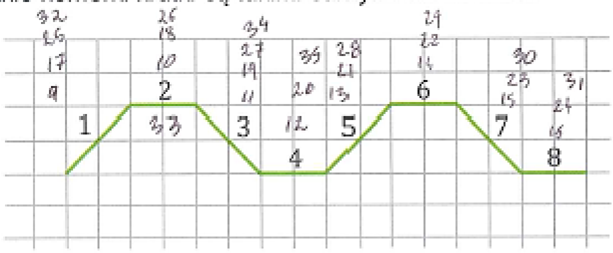
Przykład 58.



W przykładzie 59. uczeń wykorzystując fragment figury numeruje kolejne odcinki na rysunku. Pomija jeden odcinek, wpisując numer 28, i w konsekwencji udziela niepoprawnej odpowiedzi.

Przykład 59.

Uwaga: wszystkie komórki kratki są takimi samymi kwadratami.

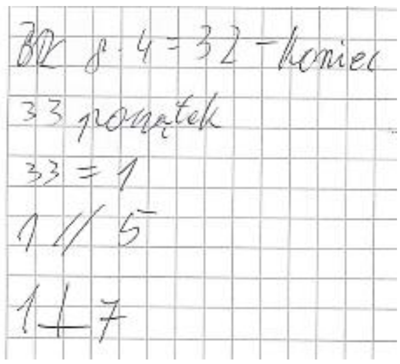


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Proste zawierające odcinki o numerach 1 oraz 7 są wzajemnie prostopadłe.	P	F
Proste zawierające odcinki o numerach 5 oraz 33 są wzajemnie równoległe.	P	F

W przykładzie 60. uczeń wykorzystuje działania arytmetyczne do określenia położenia odcinka o numerze 33 i zauważa, że jest położony tak samo, jak odcinek pierwszy.

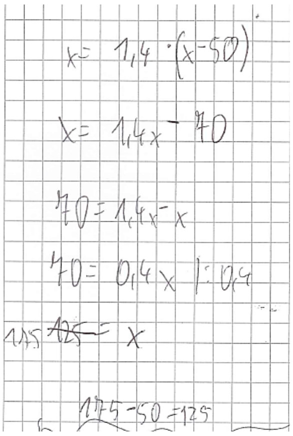
Przykład 60.



Jednym z trudniejszych zadań wśród zadań zamkniętych było zadanie 6. Dotyczyło ono ustalenia liczby jabłoni rosnących w sadzie. Prawidłowej odpowiedzi udzieliło 42% zdających. Zapisy w brudnopisach pozwalają na zaobserwowanie zróżnicowanych sposobów ustalania poprawnej odpowiedzi.

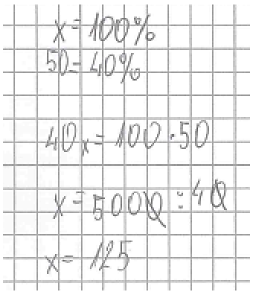
W przykładzie 61. uczeń ułożył i rozwiązał równanie z jedną niewiadomą prowadzące do obliczenia liczby grusz, a następnie wynik pomniejszył o 50 i otrzymał prawidłową liczbę jabłoni.

Przykład 61.



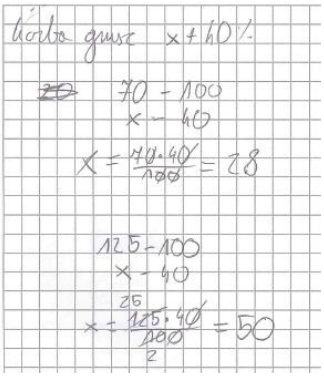
W przykładzie 62. skorzystano z własności wielkości proporcjonalnych do obliczenia liczby jabłoni.

Przykład 62.



Przykład 63. prezentuje sprawdzanie warunków zadania dla kolejnych podanych odpowiedzi.

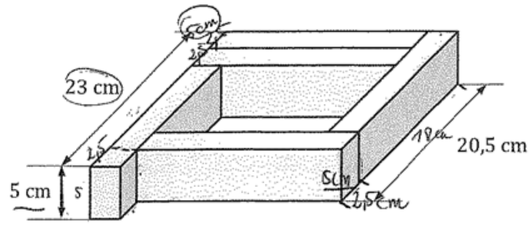
Przykład 63.



Rozwiązanie zadania 19. wymagało umiejętności odczytywania informacji przedstawionych w formie rysunku i dostrzegania na jego podstawie różnych zależności oraz powiązania ich z informacjami podanymi słownie w treści zadania, jak również znajomości wzoru na objętość prostopadłościanu. Zadaniem uczniów było wykorzystanie zależności między

najdłuższą i najkrótszą krawędzią prostopadłościennego klocka do obliczenia ich długości, a następnie obliczenie objętości tego klocka. Za rozwiązanie, które nie zawierało błędów rachunkowych i wynik liczbowy zapisany był z jednostką objętości można było otrzymać maksymalnie 3 punkty.
Przykłady od 64. do 68. ilustrują w pełni poprawne rozwiązania.

Przykład 64.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

23 cm − 5 cm = 18 cm – długość

$P_p = 5\,cm \cdot 2{,}5\,cm = 12{,}5\,cm^2$

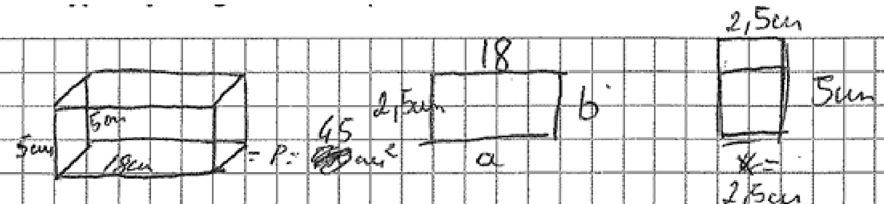
$V = P_p \cdot H$

$V = 12{,}5\,cm^2 \cdot 18\,cm = 225\,cm^3$

Odp: Objętość jednego klocka wynosi $225\,cm^3$.

W przykładzie 65. uczeń zaprezentował poprawne sposoby obliczenia długości dwóch krawędzi prostopadłościennego klocka oraz poprawnie obliczył jego objętość.

Przykład 65.



$x = 23 - 20{,}5 = 2{,}5\,cm$ $a = 20{,}5 - 2{,}5 = 18\,cm$

$x = 2{,}5\,cm$ $a = 18\,cm$

$P_p = 2{,}5 \cdot 18 = \cancel{450\ 450\,cm^2}\ 45\,cm^2$

~~Ob = 5 · 450 cm²~~

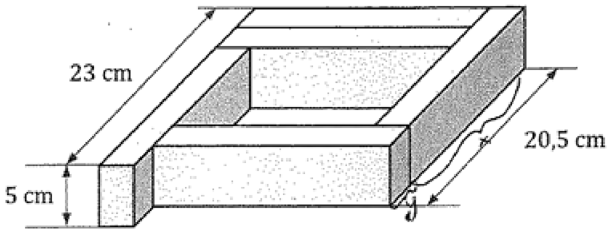
$Ob = 5 \cdot 45\,cm^2 = 225\,cm^3$

Odp. Objętość jednego klocka wynosi $225\,cm^3$.

$45 \cdot 5 = 225$

W rozwiązaniach zamieszczonych w przykładach 66. i 67. uczniowie zapisali dwie zależności między długościami dwóch krawędzi prostopadłościennego klocka wynikające z warunków zadania, w poprawny sposób obliczyli długość jego najdłuższej i najkrótszej krawędzi, a następnie poprawnie obliczyli objętość tego klocka.

Przykład 66.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

$$\boxed{\begin{aligned} x + y &= 20{,}5\,cm \\ x + 2y &= 23\,cm \end{aligned}}$$

$23\,cm - 20{,}5\,cm = 2{,}5\,cm$

$(x + 2y) - (x + y) = 2{,}5\,cm$

$x + 2y - x - y = 2{,}5\,cm$

$y = 2{,}5\,cm$

$\cancel{x = 23\,cm - 2y \quad 223\,cm}$

$x + 2y = 23\,cm$

$x = 23\,cm - 2y$

$x = 23\,cm - 5\,cm$

$x = 18\,cm$

objętość 1 klocka

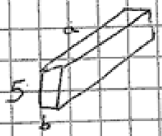
$V = x \cdot y \cdot 5 = 18 \cdot 2{,}5 \cdot 5 = 45 \cdot 5 = \underline{\underline{225\,cm^3}}$

$2{,}5 \cdot 18 = 200 + 250 = 45{,}0$

$45 \cdot 5 = 225$

Odp: Objętość jednego klocka wynosi $225\,cm^3$

Przykład 67.



$$\boxed{\begin{aligned} a + 2b &= 23\ cm \\ a + b &= 20{,}5\ cm \end{aligned}}$$

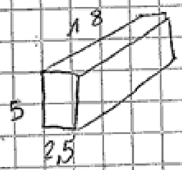
$b = \cancel{20{,}5}\ 23 - 20{,}5$

$b = 2{,}5\ cm$

$a + 2{,}5\ cm = 20{,}5$

$a = 20{,}5 - 2{,}5$

$a = 18\ cm$



$V = 18 \cdot 5 \cdot 2{,}5$

$V = 225\ cm^3$

23,0 −
20,5
02,5

20,5 −
2,5
18,0

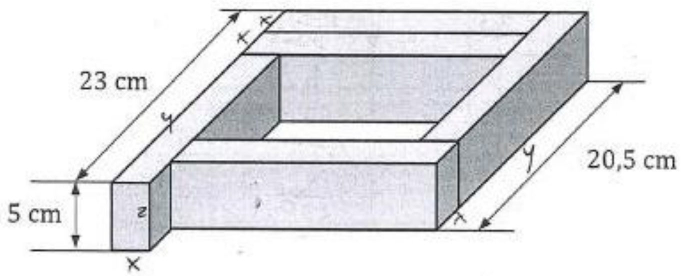
2,5 ·
5
12,5

12,5 ·
18
1000
1250
2250

Odp: Objętość jednego klocka to 225 cm³

W rozwiązaniu zilustrowanym w przykładzie 68. uczeń skorzystał z dwóch zależności między długościami najdłuższej i najkrótszej krawędzi prostopadłościennego klocka do obliczenia ich długości. Na uwagę zasługuje sposób, w jaki wykorzystał te zależności, aby znaleźć szukane długości krawędzi.

Przykład 68.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

~~x+y~~

$x+y=20{,}5cm$

$2x+y=23cm$

$\boxed{\frac{2x+y}{x+y}=\frac{23cm}{20{,}5cm}}$ równość dwóch ułamków - proporcja

$23x+23y=41x+20{,}5y \quad |-20{,}5y$

$2{,}5y+23x=41x \quad |-23x$

$2{,}5y=18x$

$y=7{,}2x$

$23cm=y+2x$

$23cm=7{,}2x+2x$

$23cm=9{,}2x$

$x=2{,}5cm$

$V=5cm\cdot x\cdot y$

$V=5cm\cdot x\cdot 7{,}2x$

$V=5cm\cdot 7{,}2x^2$

$V=5cm\cdot 7{,}2\cdot(2{,}5cm)^2$

$V=5cm\cdot 7{,}2\cdot 6{,}25cm^2$

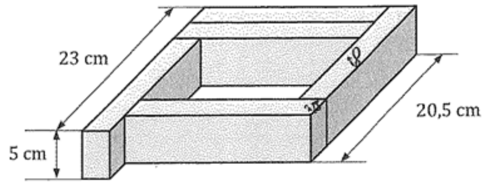
$V=36cm\cdot 6{,}25cm^2$

$V=225cm^3$ jeden prostopadłościan

Odp: Jeden klocek ma objętość $225\ cm^3$.

Uczniom, którzy za swoje rozwiązania uzyskali 2 punkty, do pełnego rozwiązania zabrakło poprawności rachunkowej (przykłady 69., 70.) lub zapisania poprawnej jednostki objętości w wyniku końcowym, co ilustrują przykłady 71. i 72. Powodem uzyskania niepełnej punktacji były też błędy w przepisywaniu (przykład 73.).

Przykład 69.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

23 cm − 20,5 = 2,5

$V = P_p \cdot H$

$V = 5 \cdot 2,5 \cdot 18$

$V = 12,5 \cdot 18$

$V = 221\ cm^3$

$2,5 \cdot 5 = 12,5$

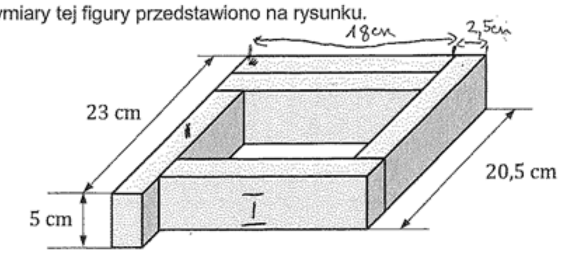
$\boxed{12,5 \cdot 18 = 2210}$

Odp: Objętoś jednego klocka jest równa 221 cm³

Przykład 70.

Zadanie 19. (0–3)

Z pięciu prostopadłościennych klocków o jednakowych wymiarach ułożono figurę. Kształt i wybrane wymiary tej figury przedstawiono na rysunku.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

$23 - 20,5 = 2,5$

~~$2x + y = 23 \ /:2$~~

~~$x + y = 1$~~

$20,5 + 2,5 = 23,0$

~~$23 - 2 \cdot 2,5$~~

$20,5 - 2,5 = 18$

$18 \cdot 5 = 90$

$V_I = 5 \cdot 2,5 \cdot 18 = 90 \cdot 2,5 = 234\ (cm^3)$

$\boxed{2,5 \cdot 90 = 234,0}$

$20,5 \cdot 2,5 = 48,0$

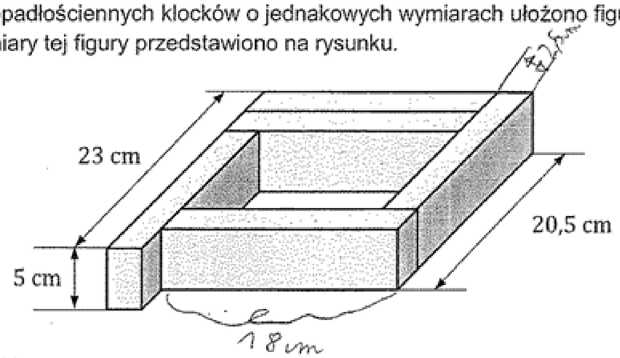
Odp. Objętość jednego klocka wynosi 234 cm³.

Zapisanie niewłaściwej jednostki lub jej brak w wyniku końcowym traktowany był jako błąd rachunkowy. W prezentowanych rozwiązaniach (przykłady 71. i 72) uczniowie zapisali jednostkę pola zamiast jednostki objętości.

Przykład 71.

Zadanie 19. (0–3)

Z pięciu prostopadłościennych klocków o jednakowych wymiarach ułożono figurę. Kształt i wybrane wymiary tej figury przedstawiono na rysunku.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

$23cm - 20,5cm = 2,5cm$

$20,5cm - 2,5cm = 18cm$

$V = P_p \cdot H$

$H = 5cm$

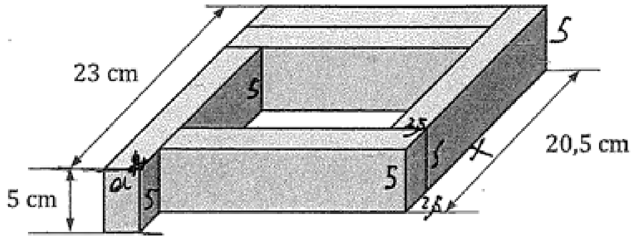
$P_p = P_{\square} = a \cdot b$

$P_p = 18cm \cdot 2,5cm = 45cm^2$

$V = 45cm^2 \cdot 5cm = 225cm$

Odp: Objętość jednego klocka to jest równa $225cm^2$

Przykład 72.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

~~$x=20,5-5$~~

~~$x=15,5$ cm~~

~~$15,5\cdot 5=$~~

$a=23-20,5$

$a=2,5$

$x=20,5-2,5$

$x=18$

$P_p=18\cdot 2,5$

$P_p=45$

$V=P_p\cdot H$

$V=45\cdot 5$

$V=225\ cm^2$

Odp. $\boxed{225\ cm^2}$

$23 - 20,5 = 2,5$

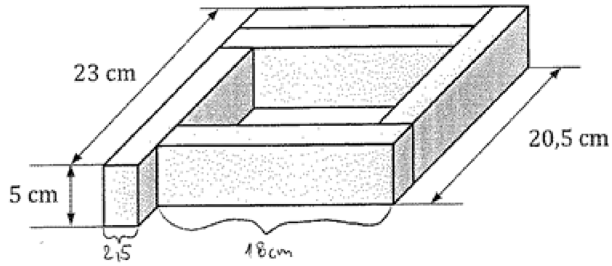
$20,5 - 2,5 = 18,0$

$18 \cdot 2,5 = 90 + 36 = 45,0$

$45 \cdot 5 = 225$

Błędy w przepisywaniu, które zaliczano do błędów rachunkowych, były również powodem obniżenia oceny rozwiązania o 1 punkt. Przykład 73. prezentuje taki rodzaj błędu.

Przykład 73.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

$V = P_p \cdot h$

$23cm - 20,5 = 2,5$

$20,5 - 2,5 =$

$23,0 - 20,5 = 2,5$

$20,5 - 2,5 = 18,0$

$P_p = 18 \cdot 2,5 = \boxed{4,5}$

$18 \cdot 2,5$: $90 + 36 = \boxed{45,0}$

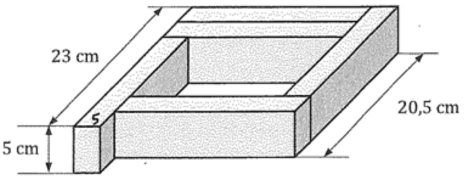
$V = 4,5 \cdot 5 = \underline{22,5\ cm^3}$

$4,5 \cdot 5 = 22,5$

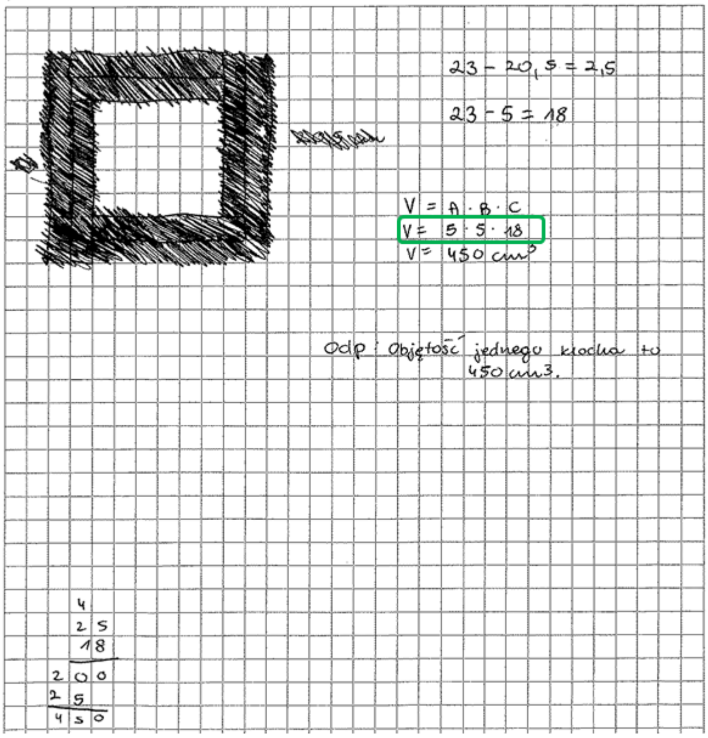
odp. Objętość jednego klocka wynosi $22,5cm^3$

W rozwiązaniach, za które uczniowie uzyskali 1 punkt, najczęściej brakowało poprawnego sposobu obliczenia objętości prostopadłościennego klocka. Uczniowie ustalali poprawne długości krawędzi klocka lub prezentowali poprawne sposoby ich obliczenia, ale nie radzili sobie z obliczeniem jego objętości (przykłady 74., 75.,76.).

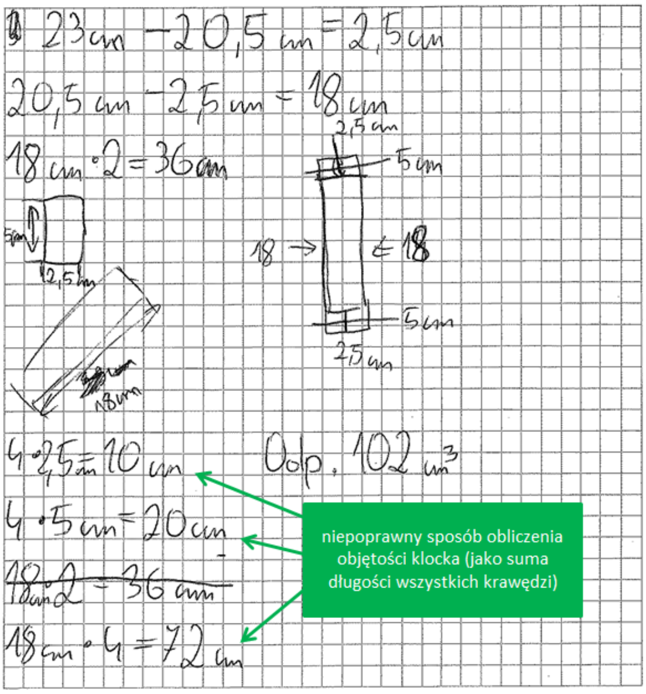
Przykład 74.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

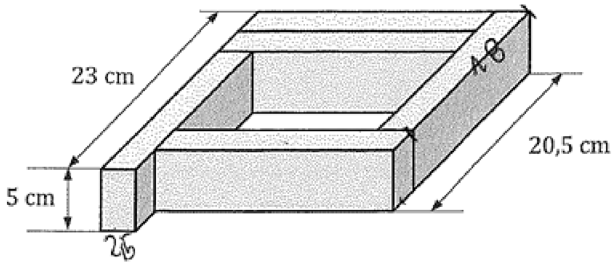


Przykład 75.



niepoprawny sposób obliczenia objętości klocka (jako suma długości wszystkich krawędzi)

Przykład 76.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

Obj = 2·12,5 +

2,5+2,5+2,5=

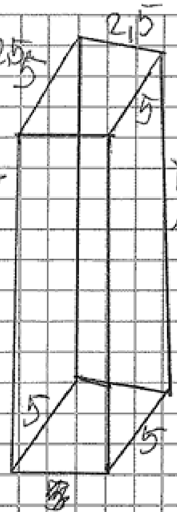
2,5+

~~P▭ = 2,5 + 5 = 10 · 2,5 · 2,5 = 10 + 10~~

P▭ = 18

Obj —

~~Obj =~~



Obj:

~~20,5 – 23 =~~

23 – 20,5 = 2,5

20,5 – 2,5 =

18

18 + 18 = 36

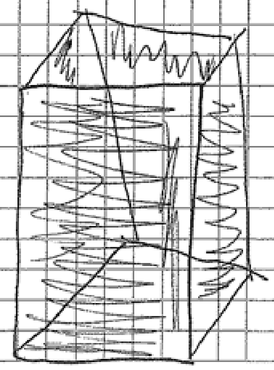
Obj = 18·4 + 5·2 + 4·2,5 =

= 36 + 10 + 10

= 56 cm²

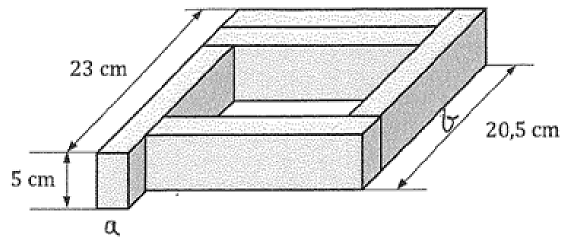
niepoprawny sposób obliczenia objętości

Odp: Objętość jednego klocka wynosi 56 cm²



W przykładzie 77. uczeń w poprawny sposób obliczył długość najdłuższej i najkrótszej krawędzi prostopadłościennego klocka. Przy obliczaniu objętości nie wykorzystał długości odpowiedniej krawędzi, tj. zamiast poprawnie obliczonej długości najdłuższej krawędzi prostopadłościennego klocka 18 cm, podstawiał długość 20,5 cm.

Przykład 77.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

20,5[cm] = a+b

23[cm] = 2a+b

23 = 20,5+a | −20,5

$\boxed{2,5[cm] = a}$

20,5 − 2,5 = b

~~18 =~~ $\boxed{18[cm] = b}$

V = 2,5 · 20,5 · 5

niepoprawna długość krawędzi

V = (10,25 + 41) · 5

V = 51,25 · 5

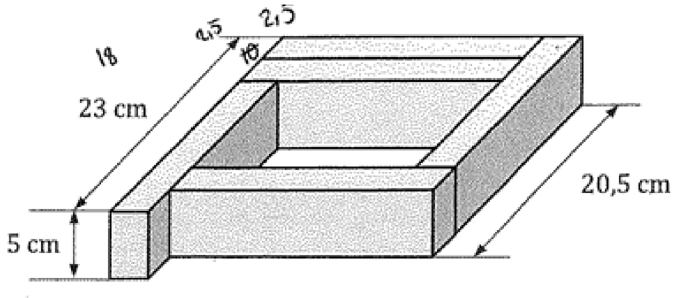
V = 250 + 6,25

V = 256,25[cm³]

odp: objętość jednego klocka jest równa 256,25 cm³.

W rozwiązaniu zamieszczonym w przykładzie 78. uczeń ustalił poprawne długości krawędzi prostopadłościennego klocka oraz zapisał poprawny wzór ogólny na objętość prostopadłościanu, jednak zastosował błędną metodę obliczenia objętości bryły – użył podwojonej wartości pola jej podstawy.

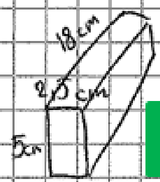
Przykład 78.



Oblicz objętość jednego klocka. Zapisz obliczenia.

$V = P_p \cdot H$

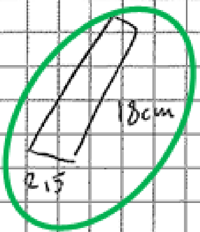
$23 - 5 = 18$



$P_p = 18 \cdot 2,5 = 45\,cm^2$

poprawne długości krawędzi

$H = 5cm$



$\boxed{V = (2 \cdot 45) \cdot 5} = 90 \cdot 5 = 450\ cm^3$

Odp. Objętość jednego klocka wynosi ~~90~~ 450cm³.

$18 : 45$

$90 \cdot 5 = 450$

$18 \cdot 5 = 90$

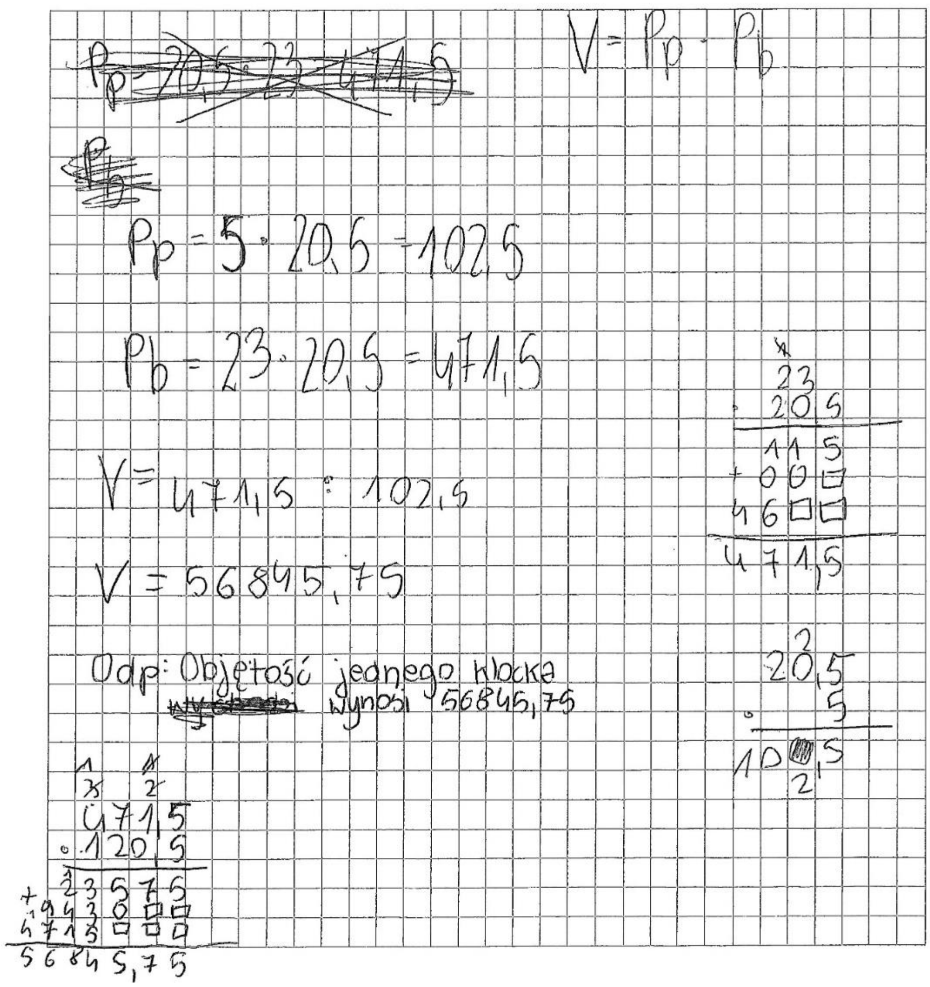
$45 + 45 = 90$

$18 \cdot 2 = 36$

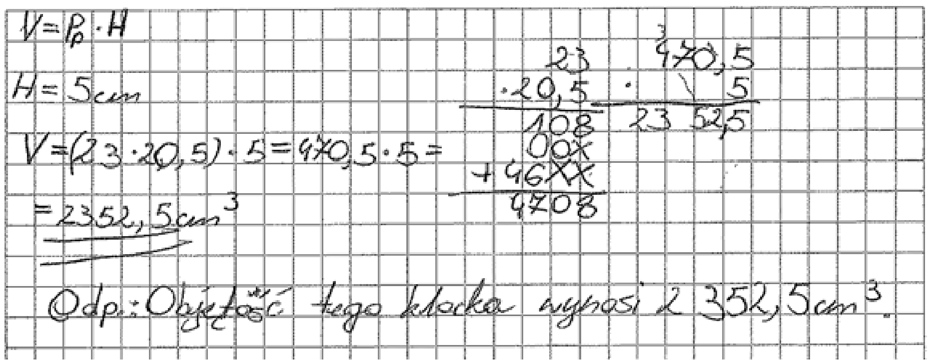
Wśród rozwiązań, za które uczniowie uzyskali 0 punktów pojawiały się takie, w których uczniowie nie potrafili w poprawny sposób obliczyć długości krawędzi prostopadłościennego klocka lub zapisać zależności między długościami dwóch krawędzi wynikającej z warunków zadania (przykłady 79., 80., 81.).

W przykładach 79. i 80. do obliczenia objętości uczeń nie obliczył długości krawędzi prostopadłościennego klocka lecz błędnie wykorzystał wartości zapisane na rysunku.

Przykład 79.

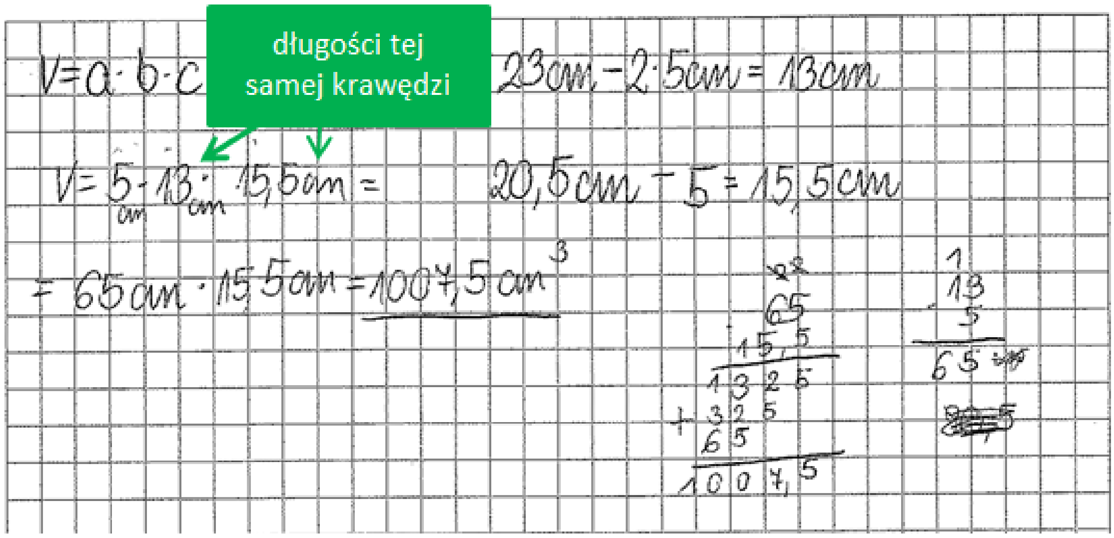


Przykład 80.



W rozwiązaniu prezentowanym w przykładzie 81. ósmoklasista ustalił nieprawidłową długość krótszej krawędzi klocka i obliczył najdłuższą krawędź korzystając z dwóch zależności wynikających z warunków zadania. W konsekwencji otrzymał dwie różne wartości liczbowe dla tej samej krawędzi 15,5 cm i 13 cm, co potwierdza, że uczeń nieprawidłowo zinterpretował dane z rysunku. Do obliczenia objętości, nie zastosował odpowiednich długości krawędzi.

Przykład 81.



Wnioski i rekomendacje

Na tegorocznym egzaminie ósmoklasisty z matematyki, podobnie jak w ubiegłych latach, sprawdzany był szeroki zakres zagadnień, w tym: działania na liczbach naturalnych, na ułamkach zwykłych i dziesiętnych oraz na potęgach i pierwiastkach, tworzenie wyrażeń algebraicznych, rozwiązywanie lub układanie równań z jedną niewiadomą. Zadania wymagały też wykazania się znajomością własności figur geometrycznych, stosowania wzorów na pola, obwody i objętość figur oraz stosowania zależności wprost proporcjonalnych.

Łatwość arkusza zastosowanego na tym egzaminie wyniosła 53%. Poziom wykonania poszczególnych zadań jest zróżnicowany – od 40% do 73% dla zadań zamkniętych, a dla zadań otwartych od 35% do 52%.

Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniach zamkniętych, które sprawdzały umiejętności: wykonywania obliczeń na liczbach naturalnych, ułamkach zwykłych i dziesiętnych oraz obliczania wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych, jak również obliczania obwodu wielokąta o danych długościach boków (zadanie 4., zadanie 5., zadanie 12.).

Najtrudniejsze okazały się zadania, które sprawdzały umiejętności: stosowania wzorów na pole trójkąta przedstawionego na rysunku, obliczania potęg o podstawach wymiernych, objętości prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi, jak również rozwiązywania zadania tekstowego za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi (zadanie 18., zadanie 7., zadanie19., zadanie 6.). Trudne dla zdających okazało się również obliczanie rzeczywistej długości odcinka, gdy dana jest jego długość w skali, czy też rozpoznawanie prostych i odcinków prostopadłych i równoległych (zadanie 10., zadanie 13.). W tej grupie znalazły się zarówno zadania otwarte, wymagające samodzielnego sformułowania odpowiedzi, jak i zadania zamknięte z opcjami wyboru odpowiedzi. Problem w tych zadaniach postawiony był w kontekście przedmiotowym albo praktycznym, a niektóre z nich ponadto zawierały rysunki. W przypadku tej grupy zadań o trudności poszczególnych zadań zdecydowały swoiste ich cechy: złożoność pod względem treści i rozwiązania wymagającego konieczności dostrzeżenia i odpowiedniego zapisania zależności, wykorzystania odpowiedniego zasobu wiedzy i umiejętności, o czym jest mowa w części tego komentarza dotyczącej przykładowych rozwiązań zadań.

Analiza poziomów wykonania zadań w zakresie poszczególnych obszarów umiejętności pokazuje, że najłatwiejsze okazały się zadania z I obszaru wymagań, które sprawdzały *sprawność rachunkową* w obliczeniach kwadratów i sześcianów liczb naturalnych (zadanie 2.) oraz wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych (zadanie 5.) Wyniki uzyskane przez ósmoklasistów za rozwiązanie zadań sprawdzających umiejętności z zakresu *rozumowania i argumentacji* (IV obszar wymagań) pozwalają stwierdzić, że podobnie jak w latach poprzednich, jest to grupa najtrudniejszych zadań, szczególnie wśród zadań otwartych tematycznie związanych z geometrią przestrzenną (zadanie 19.).

Warto w tym miejscu zauważyć, że również zadanie otwarte z geometrii płaskiej (zadanie 18.), które sprawdzało umiejętności z zakresu *wykorzystania i interpretowania reprezentacji*

(III obszar wymagań), sprawiło uczniom trudność i okazało się zadaniem najtrudniejszym w całym arkuszu. Można stwierdzić, że w tym arkuszu zadania otwarte z geometrii były dla uczniów zdecydowanie trudniejsze od dwóch pozostałych zadań otwartych osadzonych w kontekście praktycznym (zadanie 16., zadanie 17.). Kontekst praktyczny zadań sprzyjał przedstawianiu nieschematycznych sposobów rozwiązania postawionego w nich problemu, a niekoniecznie wymagał zastosowania wzoru czy równania, a także wykazaniu się pomysłowością i logicznym myśleniem. W przypadku rozwiązań zadań geometrycznych prace ujawniły niewystarczający poziom opanowania przez część zdających umiejętności rozumienia tekstu matematycznego. Wniosek ten można wysnuć na podstawie podejmowania przez zdających nieudanych prób rozwiązania zadań, w których już w początkowej fazie rozwiązania zdający rozważają sytuacje odmienne od wynikających z treści zadań, np. trójkąt prostokątny w zadaniu z planimetrii. Na wyniki egzaminu za te zadania znaczący wpływ miało również zastosowanie przez niektórych zdających niepoprawnych wzorów na pole trójkąta czy też niepoprawnego wzoru na objętość prostopadłościanu, nieumiejętne stosowanie jednostek odpowiednich dla danej wielkości oraz brak poprawności rachunkowej w obliczeniach, które wynikały z poprawnego planu rozwiązania realizowanego przez ucznia (w szczególności z zakresu wykonywania mnożenia i dzielenia sposobem pisemnym w zadaniu 19.).

Osobnym problemem, na który warto zwrócić uwagę, a który ujawnia analiza rozwiązań tych zadań, jest nieumiejętne wykorzystywanie przez uczniów rysunków stanowiących integralną część zadań. Wśród piszących byli tacy uczniowie, którzy nie potrafili poprawnie połączyć informacji z tekstu zadania z informacjami, które można odczytać z rysunku, lub nie potrafili przeprowadzić poprawnej wnikliwej analizy rysunku, aby dostrzec zależności, np. między dwiema krawędziami prostopadłościennego klocka (zadanie 19.). Część uczniów w rozwiązaniach opierała się na pomiarze, np. linijką odcinków figur przedstawionych na rysunkach (zadanie 18., zadanie 19.). Nasuwa się wniosek, aby w nauczaniu geometrii zwrócić szczególną uwagę na poprawną interpretację treści zadań przedstawianych w różnej formie oraz rozważania przez uczniów właściwych figur geometrycznych, a także ich elementów. Warto uświadamiać uczniom, że przyjęcie dodatkowego założenia, niewynikającego z treści zadania prowadzi często do rozwiązywania problemu innego niż postawiony w zadaniu.

Analiza rozwiązań zadań otwartych prowadzi do wniosku, że ósmoklasiści mimo posiadanej wiedzy, ułożenia i realizacji poprawnego planu rozwiązania zadania często nie osiągnęli w pełni sukcesu z powodu błędów rachunkowych lub niesprawdzenia wszystkich warunków zadania. Błędy rachunkowe były popełniane przez zdających na każdym etapie rozwiązania i prawdopodobnie często utrudniały dokończenie rozwiązania lub doprowadzały do otrzymania wyników niespełniających warunków zadania. Brak odpowiedniej sprawności rachunkowej, nieuwaga prowadząca do błędów w obliczeniach lub nieumiejętność stosowania praw i własności działań stawały się przyczyną niepowodzeń, utraty części punktów możliwych do uzyskania (w tym połowy punktów w dwupunktowych zadaniach otwartych). Tego typu trudności ujawniają konieczność zwracania szczególnej uwagi na staranne wykonywanie przez uczniów obliczeń w trakcie szkolnej nauki.

Wnioski z tegorocznego egzaminu można potraktować jako wskazówkę służącą poprawie efektów pracy z uczniami. Warto w pracy dydaktycznej uwzględnić niżej wymienione aktywności.

1. Na każdym etapie rozwiązywania zadań podkreślać konieczność zachowania kolejności wykonywania działań oraz omawiać z uczniami najczęściej popełniane przez nich błędy rachunkowe, wskazując przy tym przyczyny, dla których te błędy są popełniane.
2. Ćwiczyć umiejętność zapisywania wyrażeń arytmetycznych podanych opisem słownym. W czasie lekcji używać sformułowań typu: sześcian liczby, iloczyn liczb itp.
3. Kłaść nacisk na dokładną analizę nie tylko treści zadania, ale również na towarzyszący mu rysunek lub tabelę. Zachęcać uczniów do tworzenia i wykorzystania własnych rysunków pomocniczych oraz zapisywania na nich danych z treści zadania w celu wizualizacji postawionego w zadaniu problemu.
4. Ćwiczyć umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych poprzez wnikliwą analizę podanych w treści zadania danych oraz zapisywanie kolejnych kroków rozwiązania zadania.
5. Zwracać uwagę na rozumienie pojęć i nazw stosowanych w geometrii przestrzennej, np. wierzchołek, krawędź podstawy, oraz wymagać posługiwania się nimi przez uczniów. Często podkreślać różnicę pomiędzy graniastosłupem i ostrosłupem.
6. Rozwiązując zadania, zwracać uwagę na stosowane jednostki. Ćwiczyć umiejętność zamiany jednostek oraz zapisywać odpowiedzi do rozwiązywanych zadań z odpowiednią jednostką.
7. Kształcić nawyk sprawdzania, czy otrzymany wynik spełnia wszystkie warunki zadania, np. czy są zachowane podane w zadaniu zależności pomiędzy otrzymanymi wielkościami, a w przypadku wyników sprzecznych z warunkami zadania – wskazywania niezgodności.
8. Zwracać uwagę na poprawność przepisywania danych z treści zadania i wartości uzyskanych z wcześniejszych etapów rozwiązania oraz staranność zapisywania obliczeń.
9. Stwarzać uczniom możliwość prezentowania rozwiązania zadań różnymi metodami, np. stosowanie związku pomiędzy prędkością, drogą i czasem oraz stosowanie wielkości wprost proporcjonalnych.
10. Doskonalić umiejętność dostrzegania zależności, analogii, regularności. Rozwiązywać z uczniami zadania, które wymagają posługiwania się prostymi figurami uwzględniając różne położenie tych figur na płaszczyźnie oraz obserwacji najpierw konkretnych zależności, a następnie dokonywania uogólnienia.

Podstawowe informacje o arkuszach dostosowanych

Opis arkusza dla uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera

Arkusz dla uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera z zakresu matematyki (OMAP-200-2305) został przygotowany na podstawie arkusza standardowego OMAP-100-2305, zgodnie z zaleceniami specjalistów. Uczniowie otrzymali arkusze dostosowane pod względem graficznym: wyróżniono informację o numerze każdego zadania i liczbie punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie, zwiększono odstępy między wierszami w tekstach, zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi. W zadaniach zamkniętych umieszczono informacje o sposobie zaznaczenia właściwych odpowiedzi oraz dodano miejsca na rozwiązanie zadań – brudnopis.
W zadaniach otwartych uszczegółowiono polecenia i wskazano miejsca na zapisanie odpowiedzi.

Wyniki uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera

WYKRES 5. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

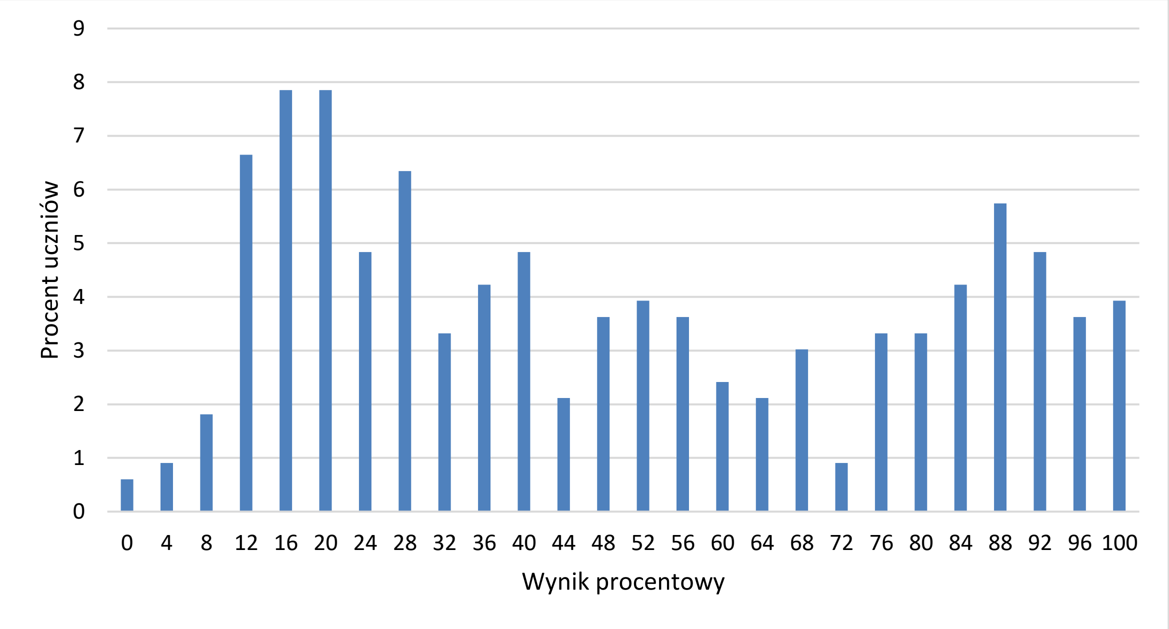


TABELA 12. WYNIKI UCZNIÓW Z AUTYZMEM, W TYM Z ZESPOŁEM ASPERGERA – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
331	0	100	44	16	49	30

Opis arkusza dla uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych

Arkusze dla uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych z zakresu matematyki (OMAP-400-2305, OMAP-500-2305, OMAP-600-2305) zostały przygotowane na podstawie arkusza OMAP-100-2305, zgodnie z zaleceniami specjalistów pracujących z uczniami z dysfunkcją wzroku. Uczniowie słabowidzący otrzymali arkusze, w których dostosowano wielkość czcionki (odpowiednio Arial 16 pkt i Arial 24 pkt), odstępy między wierszami, zmodyfikowano słownictwo i polecenia w zadaniach, uproszczono i powiększono formy graficzne, zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi. Dla uczniów niewidomych przygotowano arkusz w brajlu.

Wyniki uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych

WYKRES 6. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

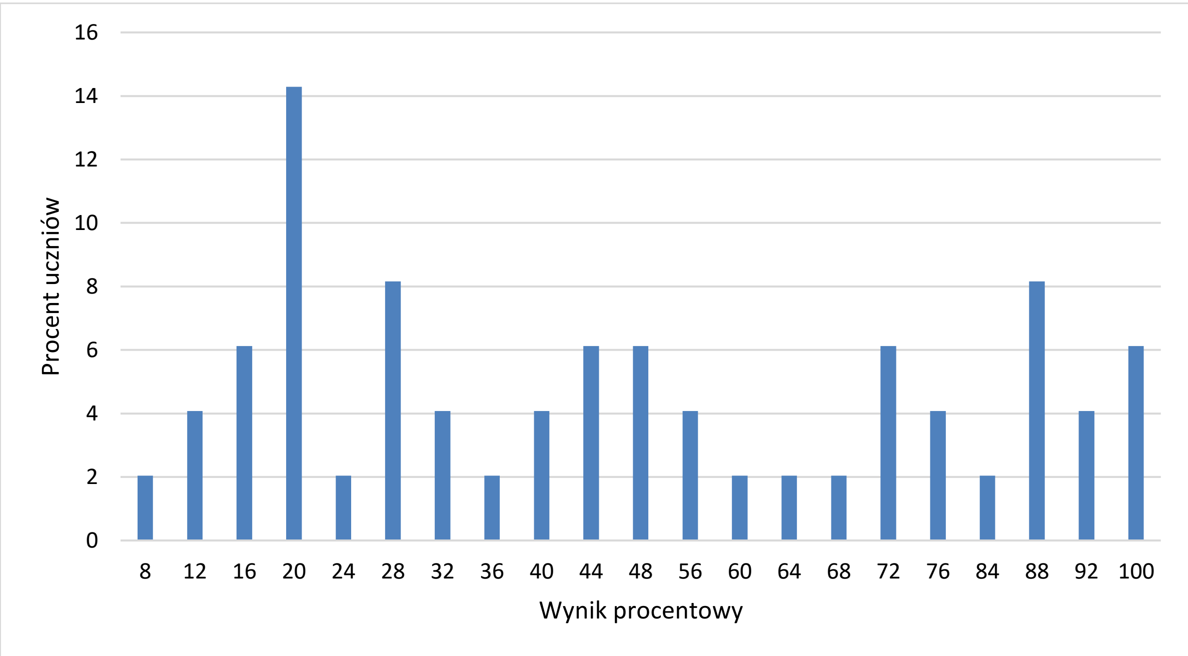


TABELA 13. WYNIKI UCZNIÓW SŁABOWIDZĄCYCH I UCZNIÓW NIEWIDOMYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
49	8	100	44	20	49	29

Opis arkusza dla uczniów słabosłyszących i uczniów niesłyszących

Uczniowie słabosłyszący i uczniowie niesłyszący rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-700-2305, który został przygotowany na podstawie arkusza OMAP-100-2305 i dostosowany do ich dysfunkcji przez specjalistów. Trzony zadań i polecenia uproszczono, ograniczając je do niezbędnych informacji oraz dostosowano słownictwo. Wyróżniono podkreśleniem istotne do rozwiązania zadań informacje, uszczegółowiono opis rysunków.

Wyniki uczniów słabosłyszących i uczniów niesłyszących

WYKRES 7. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

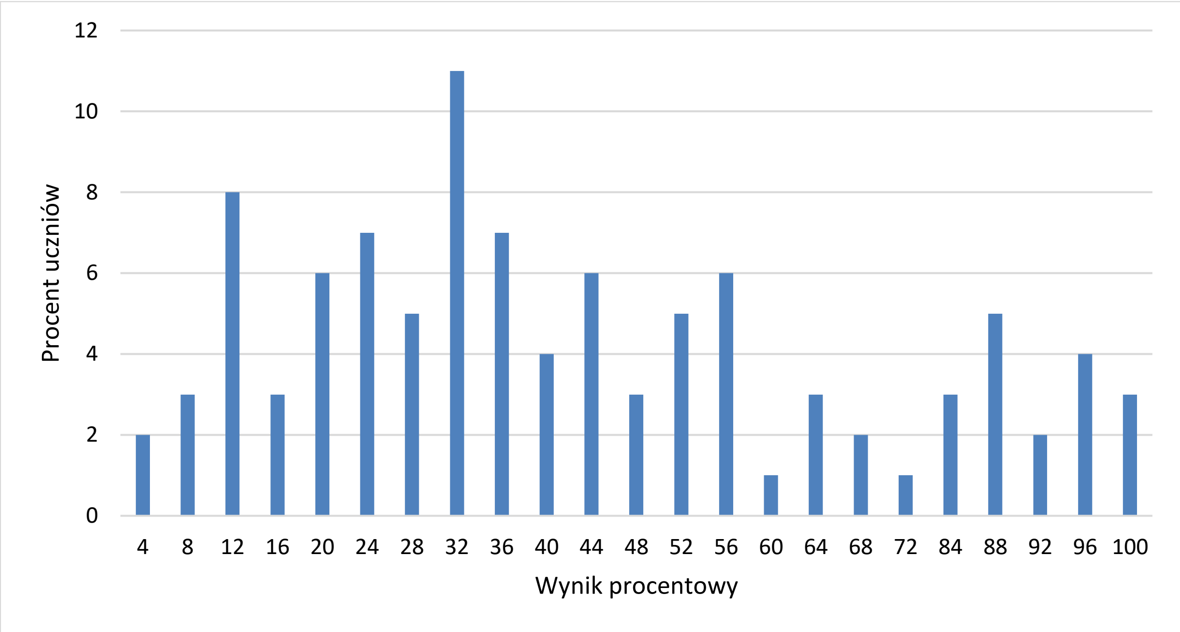


TABELA 14. WYNIKI UCZNIÓW SŁABOSŁYSZĄCYCH I UCZNIÓW NIESŁYSZĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
100	4	100	36	32	44	27

Opis arkusza dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim

Uczniowie z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-800-2305. Arkusz egzaminacyjny zawierał 15 zadań: 10 zamkniętych i 5 otwartych. Wśród zadań zamkniętych były zadania wyboru wielokrotnego i zadania typu prawda-fałsz. Zadania otwarte wymagały od uczniów samodzielnego sformułowania rozwiązania i zapisania odpowiedzi. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 25 punktów (15 punktów za zadania zamknięte i 10 punktów za zadania otwarte). Treści zadań przedstawiono lub dodatkowo zilustrowano za pomocą różnych form graficznych – tabele, rysunki – które ułatwiały udzielenie poprawnych odpowiedzi. Wiele z nich nawiązywało do sytuacji życiowych bliskich uczniowi.

Wyniki uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu lekkim

WYKRES 8. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

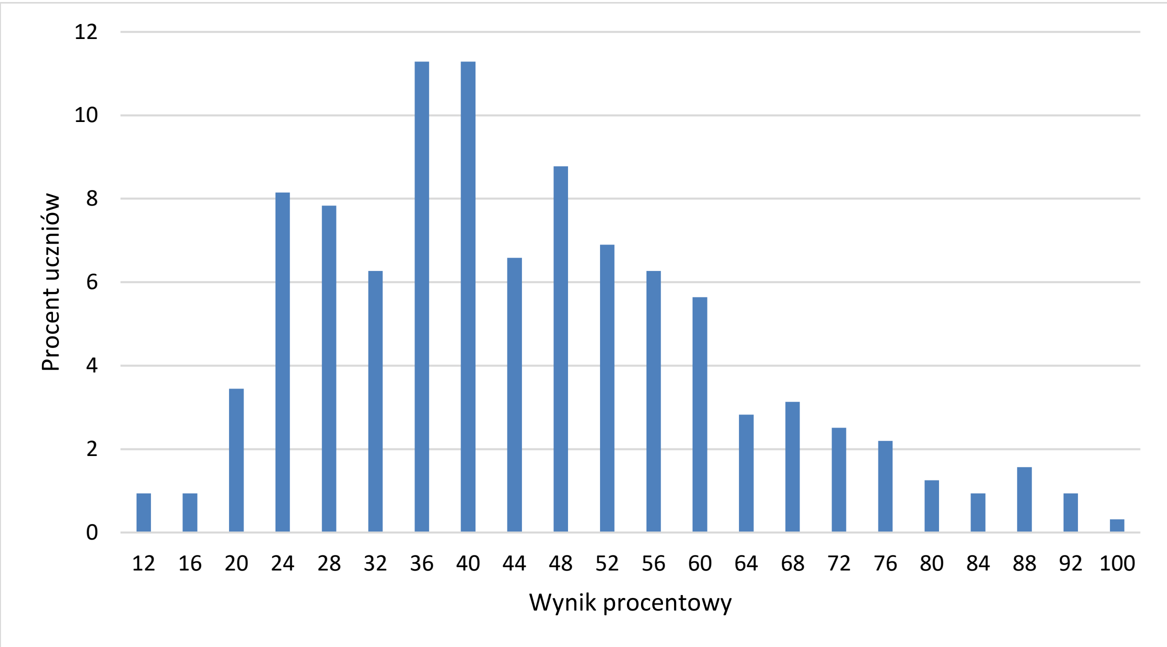


TABELA 15. WYNIKI UCZNIÓW Z NIEPEŁNOSPRAWNOŚCIĄ INTELEKTUALNĄ W STOPNIU LEKKIM – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
319	12	100	40	36	45	17

Opis arkusza dla uczniów z afazją

Uczniowie z afazją rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-900-2305. Arkusz egzaminacyjny zawierał 18 zadań: 12 zamkniętych i 6 otwartych. Wśród zadań zamkniętych było 10 zadań wyboru wielokrotnego i 2 zadania typu prawda-fałsz. Zadania otwarte wymagały od uczniów samodzielnego sformułowania rozwiązania oraz zapisania odpowiedzi. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 25 punktów (14 punktów za zadania zamknięte i 11 punktów za zadania otwarte). Arkusz został dostosowany zgodnie z zaleceniami specjalistów. Uczniowie otrzymali arkusze dostosowane pod względem graficznym: zastosowano czcionkę Arial 14 pkt, każde zadanie umieszczono na osobnej stronie, wyróżniono informację o numerze zadania i liczbie punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie, zwiększono odstępy między wierszami w tekstach i powiększono rysunki, zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi. Przy każdym zadaniu zamkniętym umieszczono informację o sposobie zaznaczenia właściwej odpowiedzi.

Wyniki uczniów z afazją

TABELA 16. WYNIKI UCZNIÓW Z AFAZJĄ – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
29	-	-	-	-	-	-

*Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Opis arkusza dla uczniów z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym

Uczniowie z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-Q00-2305. Arkusz egzaminacyjny zawierał 18 zadań: 12 zamkniętych i 6 otwartych. Wśród zadań zamkniętych było 10 zadań wyboru wielokrotnego i 2 typu prawda-fałsz. Zadania otwarte wymagały od uczniów samodzielnego sformułowania rozwiązania oraz zapisania odpowiedzi.
Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 25 punktów (14 punktów za zadania zamknięte i 11 punktów za zadania otwarte). Arkusz został dostosowany zgodnie z zaleceniami specjalistów. Uczniowie otrzymali arkusze dostosowane pod względem graficznym: zastosowano czcionkę Arial 14 pkt, każde zadanie umieszczono na osobnej stronie, wyróżniono informację o numerze zadania i liczbie punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie, zwiększono odstępy między wierszami w tekstach i powiększono rysunki, zastosowano – jednolity w całym arkuszu – pionowy układ odpowiedzi. Przy każdym zadaniu zamkniętym umieszczono informację o sposobie zaznaczenia właściwej odpowiedzi. W zadaniach wykorzystano tabelę i rysunki, które ułatwiały udzielenie poprawnych odpowiedzi.

Wyniki uczniów z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym

TABELA 17. WYNIKI UCZNIÓW Z NIEPEŁNOSPRAWNOŚCIĄ RUCHOWĄ SPOWODOWANĄ MÓZGOWYM PORAŻENIEM DZIECIĘCYM – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
7	-	-	-	-	-	-

*Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Opis arkusza dla uczniów, o których mowa w art. 94a ust. 1 ustawy (cudzoziemcy)

Uczniowie, o których mowa w art. 94a ust. 1 ustawy (cudzoziemcy), rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAP-C00-2305. Arkusz ten składał się z 19 zadań: 15 zamkniętych oraz 4 otwartych. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać maksymalnie 25 punktów (15 punktów za zadania zamknięte i 10 punktów za zadania otwarte). Arkusz był dostosowany do potrzeb zdających, którym ograniczona znajomość języka polskiego utrudnia zrozumienie czytanego tekstu.

Wyniki uczniów, o których mowa w art. 94a ust. 1 ustawy (cudzoziemcy)

WYKRES 9. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

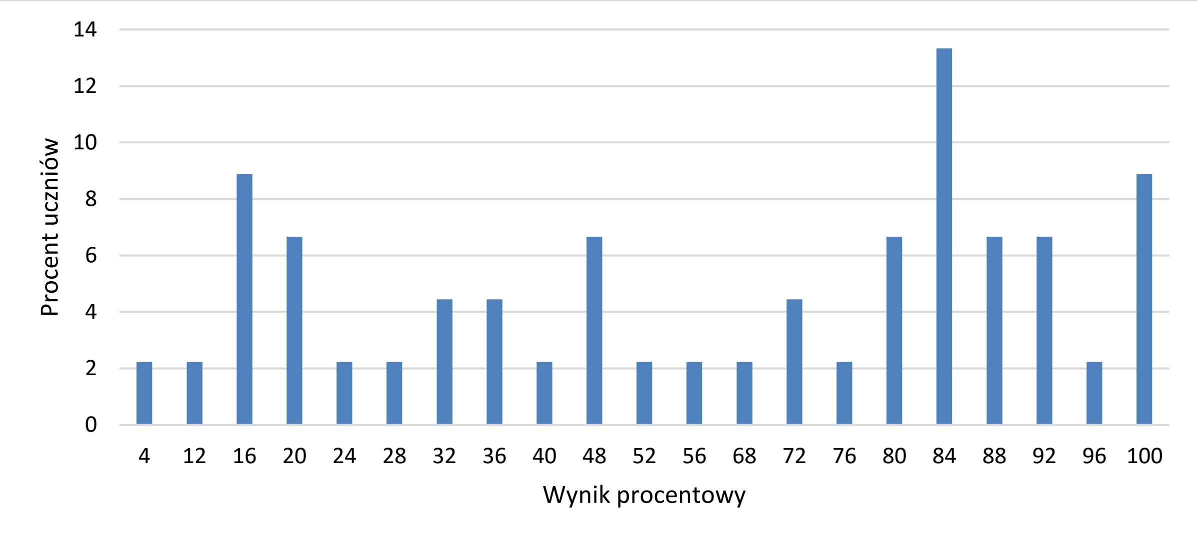


TABELA 18. WYNIKI UCZNIÓW, O KTÓRYCH MOWA W ART.94A UST.1 USTAWY (CUDZOZIEMCY) – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
45	4	100	72	84	60	31

Opis arkusza dla uczniów, o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy (obywatele Ukrainy)

Uczniowie, o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy *o pomocy obywatelom Ukrainy w związku z konfliktem zbrojnym na terytorium tego państwa*, rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu OMAU-C00-2305, przetłumaczone z arkusza standardowego na język ukraiński.

Wyniki uczniów, o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy (obywatele Ukrainy)

WYKRES 10. ROZKŁAD WYNIKÓW UCZNIÓW

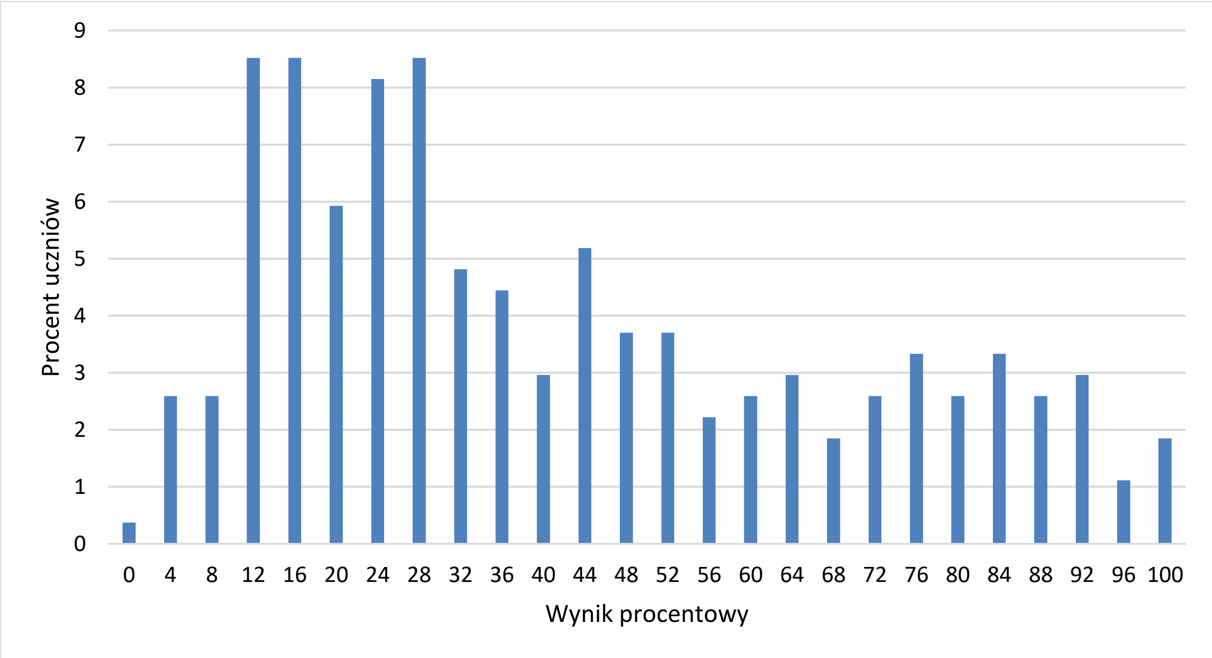


TABELA 19. WYNIKI UCZNIÓW, O KTÓRYCH MOWA W ART. 2 UST.1 USTAWY (OBYWATELE UKRAINY) – PARAMETRY STATYSTYCZNE

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
270	0	100	34	12	42	27

Opis arkusza dla uczniów z zaburzeniem widzenia barw

Arkusz dla uczniów z zaburzeniem widzenia barw z zakresu matematyki (OMAP-Z00-2305) został przygotowany na podstawie arkusza standardowego OMAP-100-2305. Zgodnie z zaleceniami specjalistów wszystkie rysunki, ilustracje i elementy graficzne zostały wykonane w odcieniach szarości.

Wyniki uczniów z zaburzeniem widzenia barw

TABELA 20. WYNIKI UCZNIÓW Z ZABURZENIEM WIDZENIA BARW – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Liczba uczniów	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
2	-	-	-	-	-	-

*Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.