

WYBRANE WZORY
MATEMATYCZNE
na egzamin eksternistyczny
z zakresu
branżowej szkoły II stopnia



Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2022

Spis treści

1. Wartość bezwzględna liczby	4
2. Potęgi i pierwiastki.....	4
3. Logarytmy	5
4. Silnia	6
5. Wzory skróconego mnożenia	6
6. Funkcja kwadratowa.....	6
7. Ciągi.....	8
8. Trygonometria	9
9. Planimetria	10
10. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej	16
11. Stereometria.....	19
12. Kombinatoryka	22
13. Rachunek prawdopodobieństwa.....	22
14. Parametry danych statystycznych	23
15. Tablica wartości funkcji trygonometrycznych	25

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

2. POTĘGI I PIERWIĄTKI

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$

– dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. LOGARYTMY

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0, y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y & \log_a x^r &= r \cdot \log_a x \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

4. SILNIA

- Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ prawdziwa jest równość:

$$(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$$

5. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \qquad a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

6. FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$) zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze. Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi.

- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ :

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

7. CIĄGI

- Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Procent składany

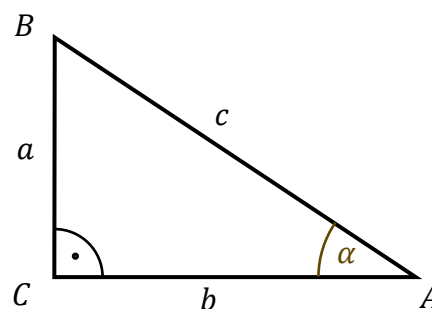
Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

8. TRYGNOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

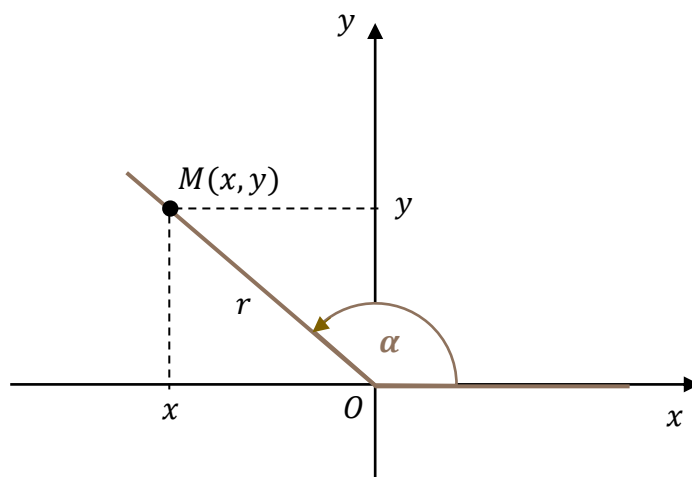


- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad \text{o ile } x \neq 0\end{aligned}$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



- Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k - \text{całkowite}\end{aligned}$$

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
α	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

9. PLANIMETRIA

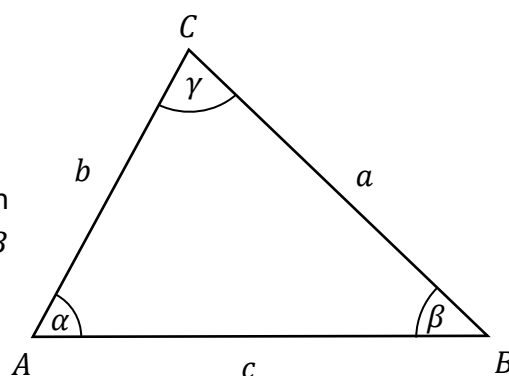
Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC :

a, b, c – długości boków w trójkącie ABC
 α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących
– odpowiednio – przy wierzchołkach A, B
oraz C

R, r – długości promieni okręgów opisanego
i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków A, B i C .

p – połowa obwodu trójkąta ABC , tj.



$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

- Wzory na pole trójkąta ABC :

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \quad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

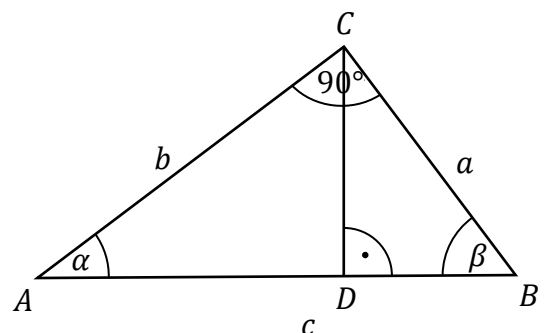
- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

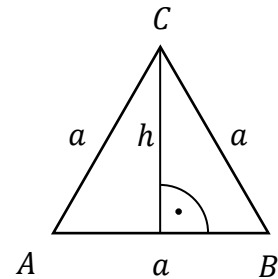


- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

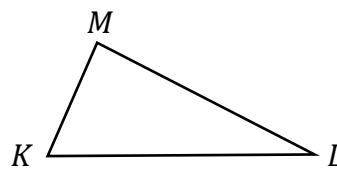
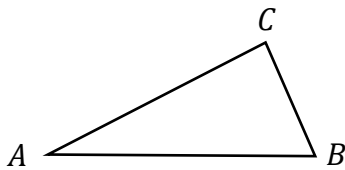
a – długość boku trójkąta równobocznego

h – wysokość trójkąta równobocznego

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
$r = \frac{1}{3}h$	$R = \frac{2}{3}h$



- Cechy przystawania trójkątów



a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM , np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$.

b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:

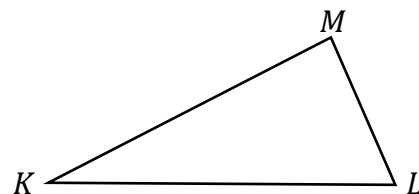
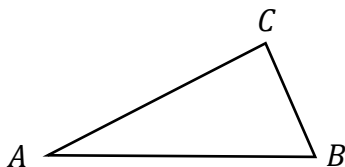
$$|AB| = |KL|, |BC| = |KM| \text{ i } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|.$$

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM :

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM , np.:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM| \text{ i } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM| \text{ i } |AB| = |KL|.$$

- Cechy podobieństwa trójkątów



a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM , np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$.

b) cecha podobieństwa „bok–ką–bok” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:

$$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|} \text{ i } |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|.$$

c) cecha podobieństwa „ką–ką–ką” dla trójkątów ABC i KLM :

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM , np.:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM| \text{ i } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM| \text{ i } |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|.$$

- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

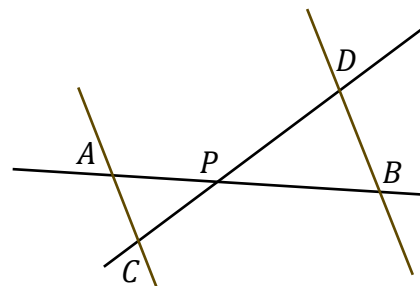
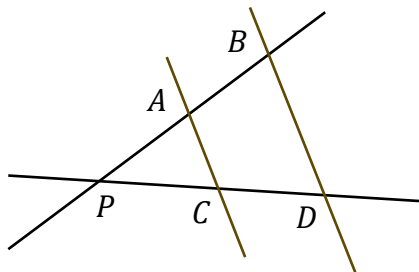
Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

– punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
LUB

– punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD .

Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$.



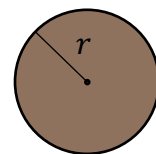
- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$

Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$



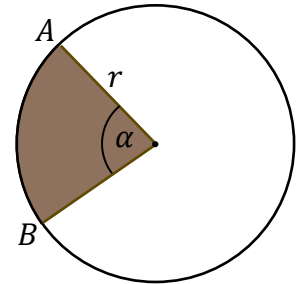
- Wycinek koła

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

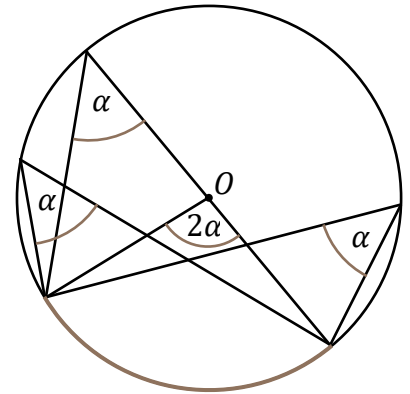
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$



- Kąty w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O , opartych na tym samym łuku, są równe.

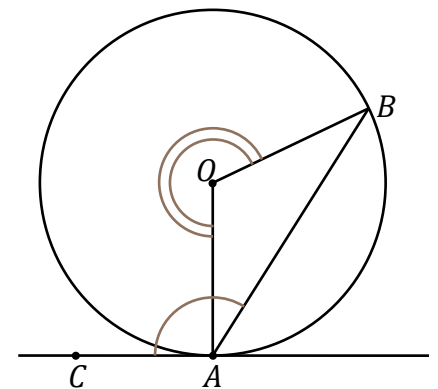
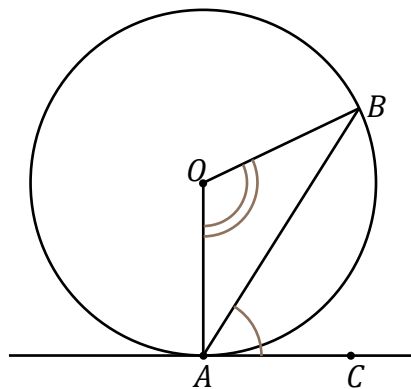
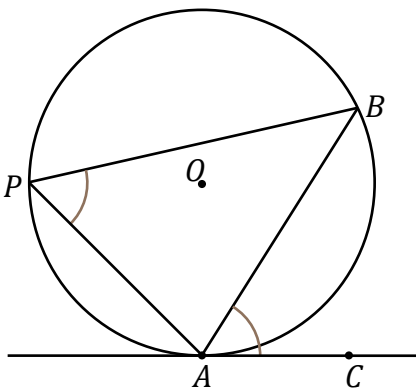


- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A , natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB . Wtedy

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \quad \text{ i } \quad |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

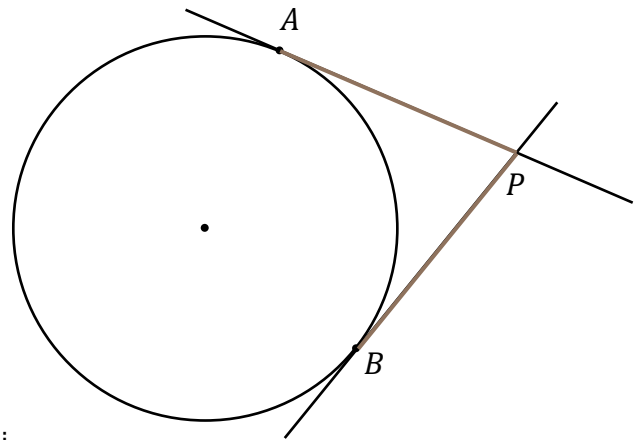
przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .



- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to

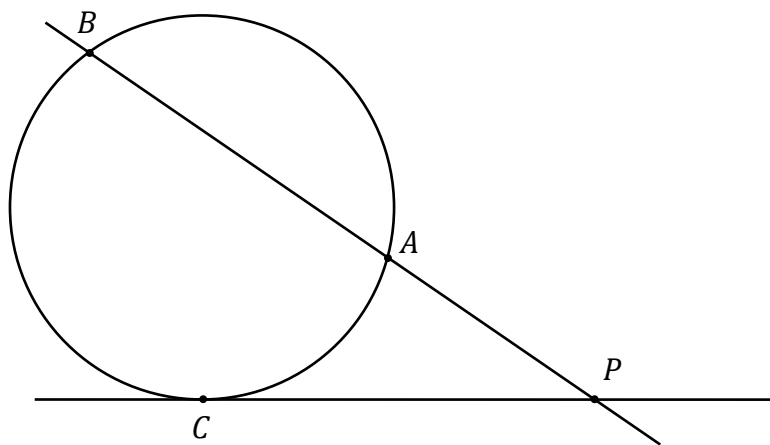
$$|PA| = |PB|$$



- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$

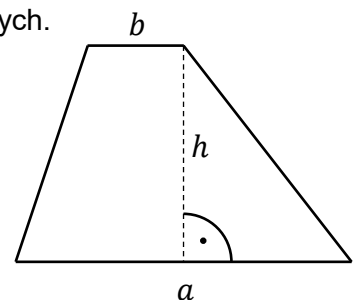


- Czworokaty

Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

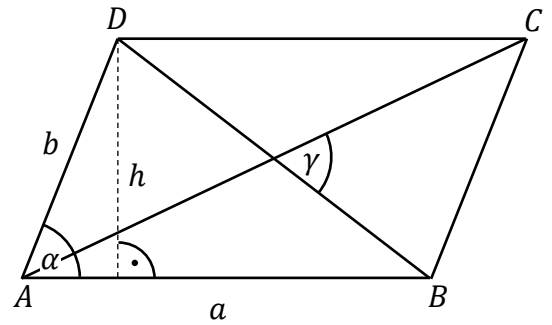


Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \quad P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \gamma$$

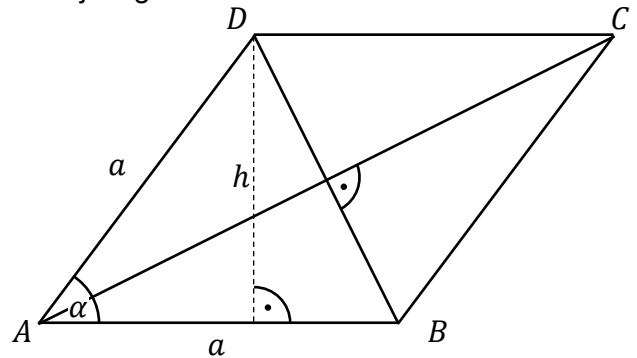


Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \quad P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

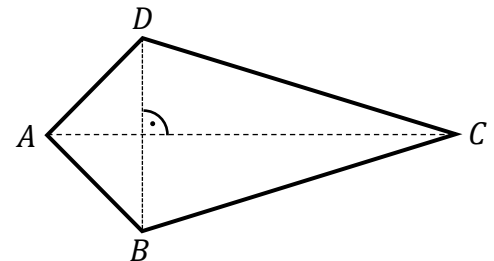
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole P deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

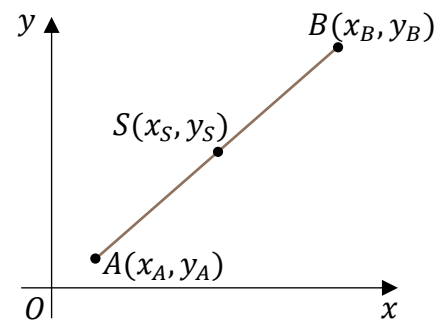


10. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

- Długość odcinka

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

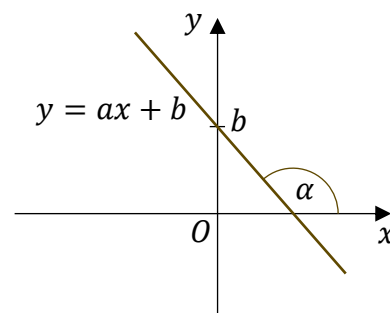
- Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to można opisać ją równaniem kierunkowym:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$\text{gdzie} \quad y - y_A = a(x - x_A) \\ a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{gdy} \quad x_B \neq x_A$$

- Równanie ogólne prostej

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 \neq 0$$

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox ; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy ; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

- Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

- Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Przekształcenia geometryczne

Symetria osiowa S_{Ox} względem osi Ox przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x, -y)$.

Symetria osiowa S_{Oy} względem osi Oy przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, y)$.

Symetria środkowa S_K względem punktu $K = (a, b)$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (2a - x, 2b - y)$.

W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, -y)$.

- Pole trójkąta

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$ jest równe:

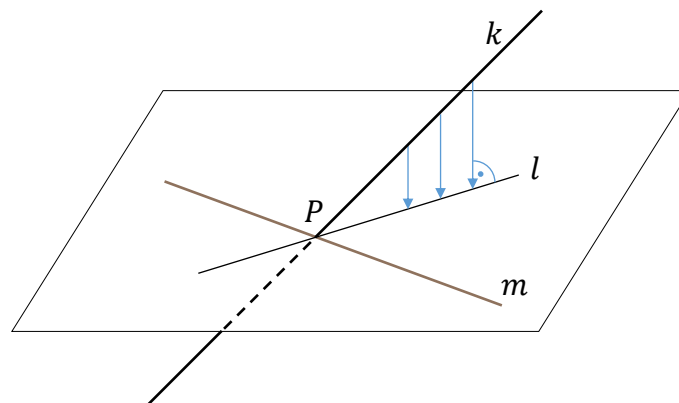
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

11. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P pod kątem ostrym. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P .

Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy m jest prostopadła do prostej l .



Przyjmujemy oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

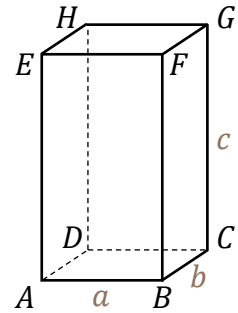
V – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

gdzie a , b , c są długościami krawędzi prostopadłościanu

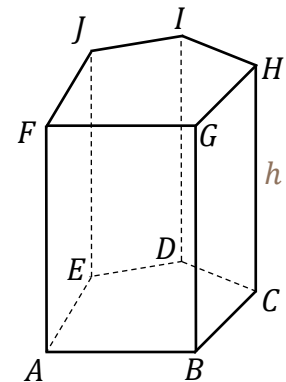


- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

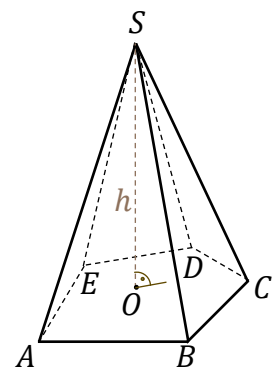
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



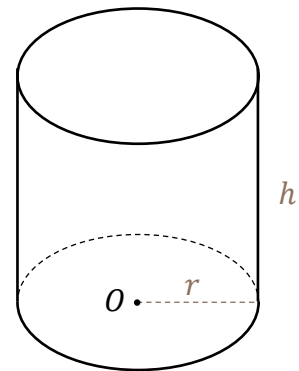
- Walec

$$P_b = 2\pi rh$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie h jest wysokością walca, O – środkiem symetrii podstawy walca, r – promieniem podstawy walca.



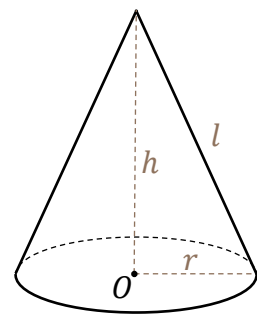
- Stożek

$$P_b = \pi rl$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

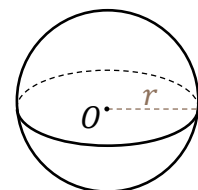


- Kula

$$P_c = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli, natomiast O – środkiem symetrii kuli.



12. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów ($0 \leq k \leq n$), jest równa $\binom{n}{k}$.

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa n^k .

13. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$P(A) \leq P(B)$ dla każdego zdarzenia A oraz B takich, że $A \subset B \subset \Omega$

$P(A') = 1 - P(A)$ gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A , natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω .

14. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna \bar{a} z liczb a_1, a_2, \dots, a_n jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia ważona

Średnia ważona \bar{s} z liczb a_1, a_2, \dots, a_n , którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: w_1, w_2, \dots, w_n , jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych a_1, a_2, \dots, a_n jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych liczbowych a_1, a_2, \dots, a_n o średniej arytmetycznej \bar{a} jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

15. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

α [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0	0,0000	1,0000	0,0000
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000

α [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900
90	1,0000	0,0000	-

