CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA
OKRĘGOWE KOMISJE EGZAMINACYJNE

Informator

o egzaminie eksternistycznym przeprowadzanym od sesji jesiennej 2022 r. do sesji zimowej 2024 r. z zakresu wymagań określonych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły II stopnia

Matematyka

Informator opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną
we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi
w Gdańsku, Jaworznie, Krakowie, Łodzi,
Łomży, Poznaniu, Warszawie i Wrocławiu

Warszawa 2020

Zespół redakcyjny:
Edyta Warzecha (CKE)
Grażyna Miłkowska (CKE)
Mariusz Mroczek (CKE)
dr Wioletta Kozak (CKE)
dr Marcin Smolik (CKE)

Recenzenci:
Grażyna Śleszyńska

Informator został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 01
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
Al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
Plac Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

PODSTAWA PROGRAMOWA KSZTAŁCENIA OGÓLNEGO DLA BRANŻOWEJ SZKOŁY II STOPNIA dla uczniów będących absolwentami dotychczasowego gimnazjum

MATEMATYKA

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Wykorzystanie informacji
Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji
Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.

III. Modelowanie matematyczne
Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.

IV. Użycie i tworzenie strategii
Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.

V. Rozumowanie i argumentacja
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste. Uczeń:
1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);
2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);
3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;
4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);
6) wykorzystuje definicje logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

II. Równania i nierówności. Uczeń:
1) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$;
2) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$;
3) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$.

III. Funkcje. Uczeń:
1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;
2) posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość;
3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);
4) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$;
5) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
6) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
7) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

IV. Ciągi. Uczeń:
1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
3) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
4) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

V. Trygonometria. Uczeń:
1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°;
2) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi, w tym wzór $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
3) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

VI. Planimetria. Uczeń:
1) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;
2) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;
3) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

VII. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:
1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;
5) wyznacza współrzędne środka odcinka;
6) oblicza odległość dwóch punktów;
7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.

VIII. Stereometria. Uczeń:

1) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości;
2) wykorzystuje własności figur geometrycznych na płaszczyźnie do analizy zagadnień z geometrii przestrzennej.

IX. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń:

1) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;
3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

CHARAKTERYSTYKA ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO

Arkusz egzaminacyjny z matematyki składa się z zadań z zakresu wykorzystania informacji, wykorzystania i interpretowania reprezentacji, modelowania matematycznego, użycia i tworzenia strategii oraz rozumowania i argumentacji. Zadania zawarte w arkuszu sprawdzają rozumienie pojęć, badają umiejętność ich zastosowania w sytuacjach praktycznych i typowych oraz o charakterze problemowym.
Arkusz zawiera zadania w formie zamkniętej (np. wyboru wielokrotnego i prawda/fałsz) oraz otwartej, wymagającej od zdającego stworzenia wypowiedzi (np. zapisania obliczeń i podania ich wyniku).
W arkuszu egzaminacyjnym obok numeru każdego zadania podano liczbę punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.

PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY

Przykładowy arkusz egzaminacyjny zawiera instrukcję dla zdającego oraz zestaw zadań egzaminacyjnych. Przykładowe rozwiązania zadań zamieszczonych w arkuszu znajdują się w końcowej części informatora w zasadach oceniania rozwiązań zadań.

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

PESEL (*wpisuje zdający*)

DMAP–100–22XX

EGZAMIN EKSTERNISTYCZNY Z MATEMATYKI

SZKOŁA BRANŻOWA II STOPNIA

Czas pracy: 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1–26). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań otwartych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego.
8. Na karcie punktowania wpisz swój PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że w przypadku stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań egzaminacyjnych lub zakłócania prawidłowego przebiegu egzaminu w sposób utrudniający pracę pozostałym osobom zdającym, przewodniczący zespołu nadzorującego przerywa i unieważnia egzamin eksternistyczny.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **40 punktów**.

W zadaniach 1−19 wybierz i podkreśl jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}$ jest równa

A. $\sqrt{28}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $6\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{288}$

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $-4^2+(-4)^2$ jest równa

A. 32 **B.** 0 **C.** -16 **D.** -32

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{3}{4}}$ jest równa

A. 2 **B.** $8^{\frac{3}{8}}$ **C.** 4 **D.** $8^{\frac{5}{4}}$

Zadanie 4. (0–1)

Liczba $\log_2 3+2\log_2 5$ jest równa

A. $\log_2 28$ **B.** $2\log_2 8$ **C.** $\log_2 75$ **D.** $2\log_2 15$

Zadanie 5. (0–1)

Wartość wyrażenia $\frac{6-3x}{6-x}$ dla $x=\frac{4}{3}$ jest równa

A. 3 **B.** $\frac{3}{5}$ **C.** $\frac{5}{14}$ **D.** $\frac{3}{7}$

Zadanie 6. (0–1)

W zbiorze liczb rzeczywistych równanie $x(x-3)(2x+2)=0$ ma trzy rozwiązania:

A. $x=1$, $x=-3$, $x=2$
B. $x=0$, $x=3$, $x=-2$
C. $x=0$, $x=3$, $x=-1$
D. $x=0$, $x=-3$, $x=1$

BRUDNOPIS

Zadanie 7. (0–1)

Funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x)=1-x^3$.

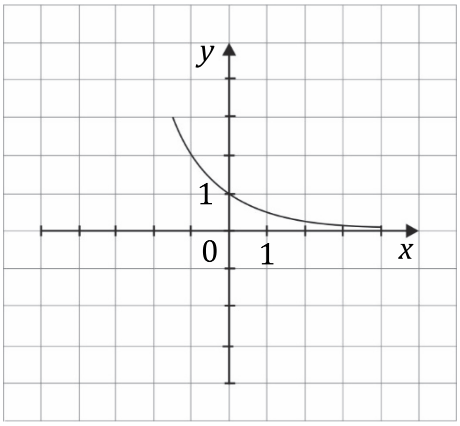
Wskaż argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 65.

A. $x=\sqrt[3]{65}$ **B.** $x=4$ **C.** $x=-4$ **D.** $x=-\sqrt[3]{65}$

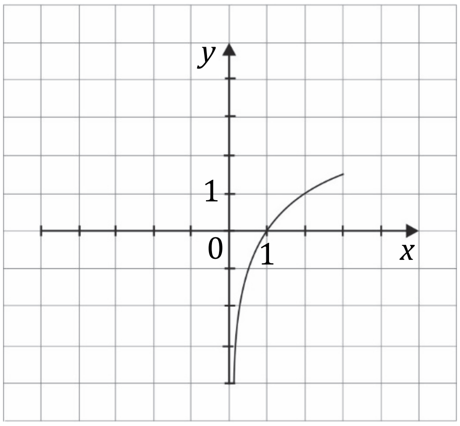
Zadanie 8. (0–1)

Wskaż rysunek, na którym przedstawiono fragment wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

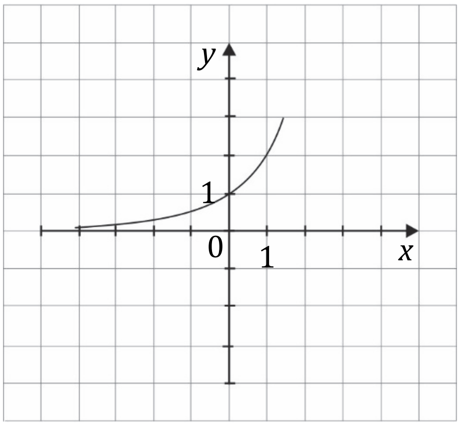
A.



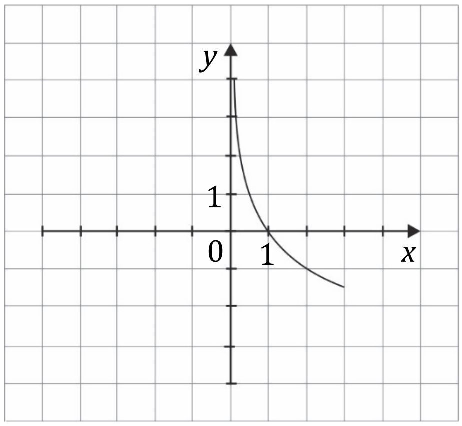
B.



C.



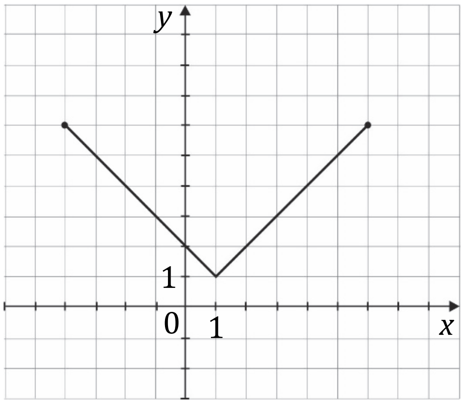
D.



BRUDNOPIS

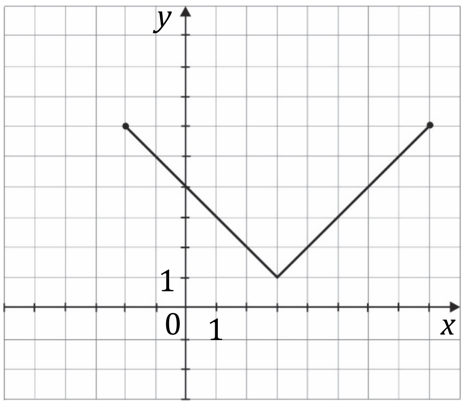
Zadanie 9. (0–1)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$, której dziedziną jest przedział $\langle -4, 6 \rangle$.

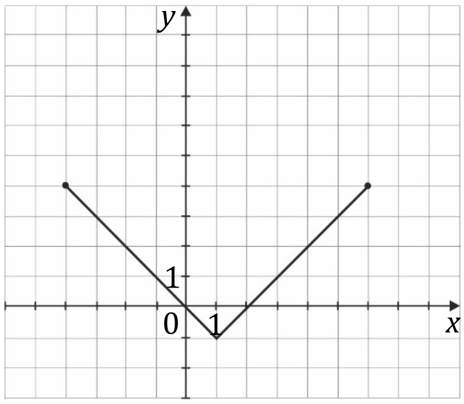


Wskaż rysunek, na którym przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem $y = f(x) + 2$.

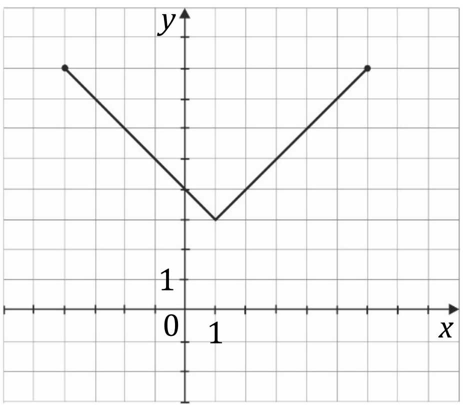
A.



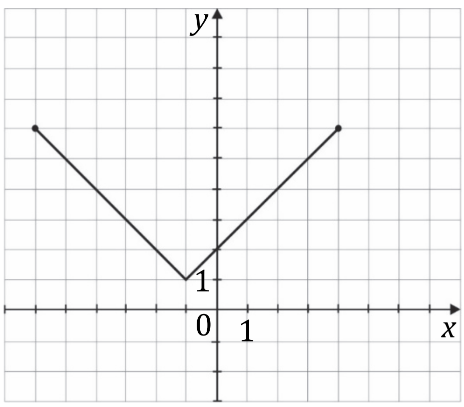
B.



C.



D.



BRUDNOPIS

Zadanie 10. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3 - n^2$ dla $n \geq 1$. Zatem

A. $a_1 = 4$ i $a_4 = -13$

B. $a_1 = 2$ i $a_4 = -13$

C. $a_1 = 4$ i $a_4 = 19$

D. $a_1 = 2$ i $a_4 = 19$

Zadanie 11. (0–1)

Trzywyrazowy ciąg liczbowy $(3, 21, x+10)$ jest ciągiem geometrycznym. Stąd wynika, że

A. $x = 147$ **B.** $x = 137$ **C.** $x = 39$ **D.** $x = 29$

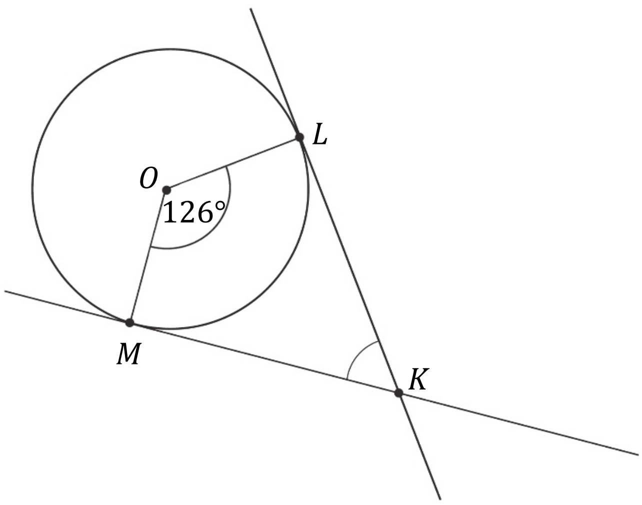
Zadanie 12. (0–1)

Dany jest trójkąt o bokach długości: $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 3. Trójkąt podobny do tego trójkąta ma boki o długościach

A. $4, 6, 9$ **B.** $2, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ **C.** $2, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{3}, 6, 2\sqrt{3}$

Zadanie 13. (0–1)

Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Przez punkty L i M poprowadzono styczne do tego okręgu, które przecinają się w punkcie K. Miara kąta środkowego LOM jest równa $126°$ (patrz rysunek).



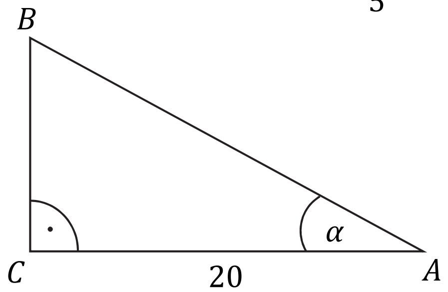
Miara zaznaczonego kąta ostrego MKL jest równa

A. $53°$ **B.** $54°$ **C.** $55°$ **D.** $56°$

BRUDNOPIS

Zadanie 14. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przyprostokątna AC ma długość równą 20 (patrz rysunek), a cosinus kąta α przy wierzchołku A jest równy $\frac{4}{5}$.



Wynika stąd, że długość przeciwprostokątnej AB tego trójkąta jest równa

A. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ **B.** 16 **C.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ **D.** 25

Zadanie 15. (0–1)

Dany jest trójkąt, w którym dwa boki mają długości 4 i 9, a miara kąta między tymi bokami jest równa $60°$. Pole tego trójkąta jest równe

A. $9\sqrt{2}$ **B.** $9\sqrt{3}$ **C.** $18\sqrt{2}$ **D.** $18\sqrt{3}$

Zadanie 16. (0–1)

Proste o równaniach $y = x + 2$ i $y = -2x + 5$ przecinają się w punkcie P. Stąd wynika, że

A. $P = (1,3)$ **B.** $P = (1,-2)$ **C.** $P = (2,5)$ **D.** $P = (-2,5)$

Zadanie 17. (0–1))

Dany jest odcinek, którego końcami są punkty $A = (1,-2)$ i $B = (-25,44)$. Środkiem odcinka AB jest punkt S. Wynika stąd, że

A. $S = (13,23)$ **B.** $S = (-12,21)$ **C.** $S = (-13,23)$ **D.** $S = (-12,23)$

Zadanie 18. (0–1)

W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (-3,2)$ i $B = (1,7)$. Odległość między punktami A i B jest równa

A. $|AB| = \sqrt{29}$ **B.** $|AB| = \sqrt{41}$ **C.** $|AB| = \sqrt{85}$ **D.** $|AB| = \sqrt{97}$

Zadanie 19. (0–1)

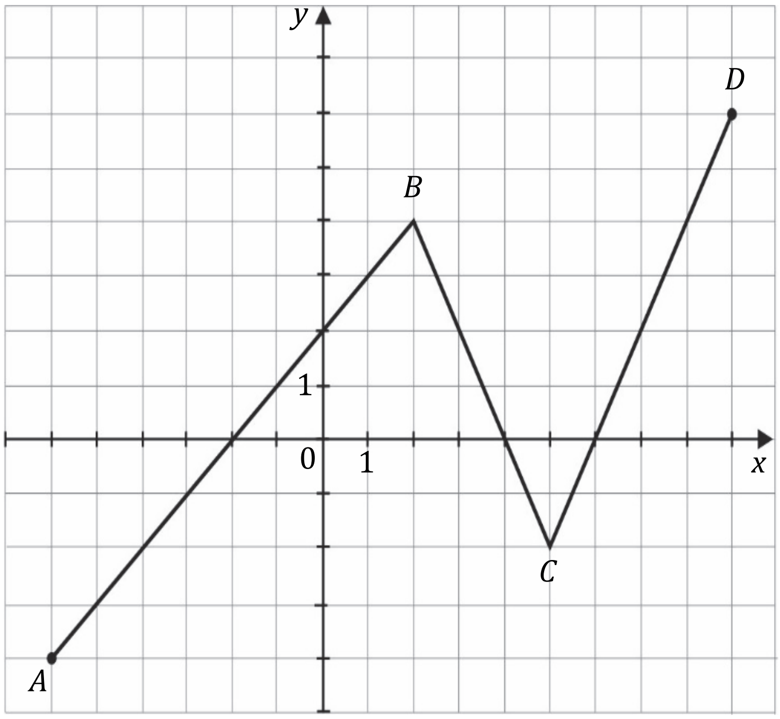
Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 3, 5. Takich liczb jest

A. $5 \cdot 5 \cdot 5$ **B.** $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ **C.** $3+3+3+3+3$ **D.** $3+5$

BRUDNOPIS

Zadanie 20. (0–3)

Poniżej przedstawiono wykres funkcji f, której dziedziną jest przedział $\langle -6,9 \rangle$. Do wykresu funkcji f należą cztery zaznaczone punkty o następujących współrzędnych: $A=(-6,-4)$, $B=(2,4)$, $C=(5,-2)$, $D=(9,6)$.



Uzupełnij poniższe zdania.

20.1. Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty ______________ .

20.2. Funkcja f przyjmuje wartość równą 4 dla argumentów ______________ .

20.3. Największą wartością funkcji f w przedziale $\langle 4,7 \rangle$ jest liczba ______________ .

Zadanie 21. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{x+2}{x}=3x$, gdzie $x \neq 0$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 22. (0–2)

Uzasadnij, że nie istnieje taki kąt ostry α, dla którego jednocześnie prawdziwe są równości $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Zadanie 23. (0–4)

Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym suma pierwszego i trzeciego wyrazu jest równa 8, a różnica tego ciągu $r = -2$. Oblicz:

a) pierwszy wyraz tego ciągu,
b) sumę stu początkowych wyrazów tego ciągu.

Odpowiedź: ....

Zadanie 24. (0–3)

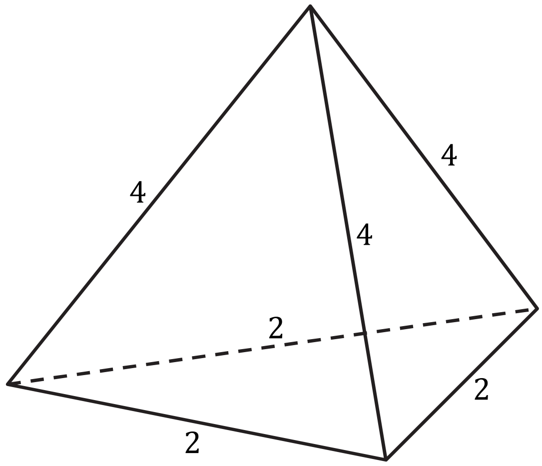
Dana jest prosta l o równaniu $y = 2x + 3$. Wyznacz równanie prostej, która jest prostopadła do prostej l i przechodzi przez punkt $P = (4, -1)$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 25. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Każda z krawędzi podstawy tego ostrosłupa ma długość 2, a każda z jego krawędzi bocznych ma długość 4. Oblicz:

a) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa,
b) cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



Odpowiedź: ....

Zadanie 26. (0–3)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wszystkie cyfry wylosowanej liczby są nieparzyste.

Odpowiedź: ....

BRUDNOPIS

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ ZAMIESZCZONYCH W ARKUSZU EGZAMINACYJNYM

Zadanie 1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	I. Liczby rzeczywiste. Uczeń: 3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	I. Liczby rzeczywiste. Uczeń: 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	I. Liczby rzeczywiste. Uczeń: 4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	I. Liczby rzeczywiste. Uczeń: 6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	I. Liczby rzeczywiste. Uczeń: 2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	II. Równania i nierówności. Uczeń: 2) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	III. Funkcje. Uczeń: 2) posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	III. Funkcje. Uczeń: 6) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	III. Funkcje. Uczeń: 4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	IV. Ciągi. Uczeń: 1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	IV. Ciągi. Uczeń: 4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VI. Planimetria. Uczeń: 2) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VI. Planimetria. Uczeń: 1) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	V. Trygonometria. Uczeń: 1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VI. Planimetria. Uczeń: 3) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VII. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń: 4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VII. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń: 5) wyznacza współrzędne środka odcinka.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VII. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń: 6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	IX. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń: 2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 20. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	III. Funkcje. Uczeń: 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą).

20.1.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne uzupełnienie luki.
0 pkt – niepoprawne lub niepełne uzupełnienie luki albo brak uzupełnienia.

Rozwiązanie
$-2, 4$ i 6

20.2.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne uzupełnienie luki.
0 pkt – niepoprawne lub niepełne uzupełnienie luki albo brak uzupełnienia.

Rozwiązanie
2 i 8

20.3.

Zasady oceniania
1 pkt – poprawne uzupełnienie luki.
0 pkt – niepoprawne uzupełnienie luki albo brak uzupełnienia.

Rozwiązanie
2

Zadanie 21. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	II. Równania i nierówności. Uczeń: 3) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje:
0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające błędy merytoryczne
1 punkt za doprowadzenie podanego równania do postaci równania kwadratowego, np. $3x^2-x-2=0$ i obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $3x^2-x-2$, $\Delta=25$.
1 punkt za obliczenie rozwiązań równania: $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=1$.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Ponieważ z założenia mianownik ułamka na lewej stronie równania jest różny od zera, więc obie strony równania możemy pomnożyć przez x. Otrzymujemy równanie kwadratowe,
$x+2=3x^2$, a po uporządkowaniu $3x^2-x-2=0$.
Obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2-x-2$

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot3\cdot(-2)=1+24=25.$$

Ponieważ wyróżnik tego trójmianu jest dodatni, więc równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\cdot3}=\frac{1-5}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$$

oraz

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\cdot3}=\frac{1+5}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Zapisujemy odpowiedź:
Równanie $\frac{x+2}{x}=3x$ ma dwa rozwiązania: $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=1$.

Zadanie 22. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	V. Trygonometria. Uczeń: 3) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje:
0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające błędy merytoryczne
1 punkt za: • zapisanie, że $\sin^2\alpha = \frac{1}{9}$ oraz $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$, **albo** • naszkicowanie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości x, przeciwprostokątnej długości $3x$ i zaznaczenie kąta ostrego, przy którym spełniony jest warunek $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, **albo** • naszkicowanie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej długości $2x$, przeciwprostokątnej długości $3x$ i zaznaczenie kąta ostrego, przy którym spełniony jest warunek $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, **albo** • naszkicowanie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości x, $2x$ i przeciwprostokątnej długości $3x$ i zaznaczenie kąta ostrego, przy którym spełnione są równości $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.
1 punkt za: • zapisanie, że równość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ jest sprzeczna z tożsamością $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, **albo** • obliczenie długości drugiej przyprostokątnej $2x\sqrt{2}$, i zapisanie , że wtedy powinna zachodzić równość $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ wbrew temu, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, **albo** • obliczenie długości drugiej przyprostokątnej $x\sqrt{5}$, i zapisanie, że wtedy powinna zachodzić równość $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ wbrew temu, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, **albo** • zapisanie, że równość $x^2 + (2x)^2 = (3x)^2$ nie jest prawdziwa, dla żadnej liczby $x > 0$.

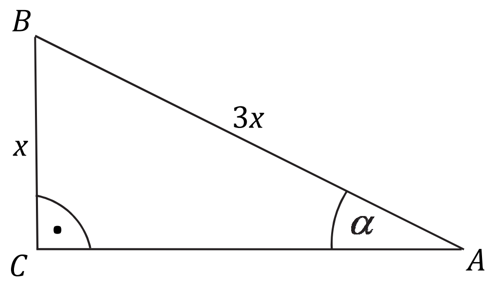
Przykładowe pełne rozwiązania

I sposób

Obliczamy $\sin^2\alpha = \frac{1}{9}$ oraz $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$. Zatem $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ i otrzymaliśmy sprzeczność z tożsamością $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, która jest prawdziwa dla każdego kąta α.
Zatem dla żadnego kąta ostrego α nie mogą być jednocześnie prawdziwe równości $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

II sposób

Załóżmy, że w trójkącie prostokątnym kąt ostry tego trójkąta spełnia warunek $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ (patrz rysunek).



Wtedy z twierdzenia Pitagorasa wynika, że
$|AC|^2 = (3x)^2 - x^2 = 9x^2 - x^2 = 8x^2$, czyli $|AC| = 2x\sqrt{2}$.
Obliczamy cosinus kąta α

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2x\sqrt{2}}{3x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z podaną w treści zadania informacją, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.
Oznacza to, że dla żadnego kąta ostrego α nie mogą być jednocześnie prawdziwe równości $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Zadanie 23. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	IV. Ciągi. Uczeń: 3) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje:
0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające błędy merytoryczne
1 punkt za zapisanie równania z jedną niewiadomą, opisującego podaną sumę pierwszego i trzeciego wyrazu tego ciągu, np.: $a_1 + a_1 + 2r = 8$.
1 punkt za obliczenie pierwszego wyrazu tego ciągu: $a_1 = 6$.
1 punkt za obliczenie setnego wyrazu tego ciągu: $a_{100} = -192$.
1 punkt za obliczenie szukanej sumy: $S_{100} = -9300$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

a) Zapisujemy równanie, wynikające z treści zadania

$a_1 + a_3 = 8$.

Ponieważ trzeci wyraz ciągu arytmetycznego spełnia zależność

$a_3 = a_1 + 2r$,

a różnica tego ciągu $r = -2$, więc pierwsze zapisane równanie jest równaniem z jedną niewiadomą a_1

$a_1 + a_1 + 2\cdot(-2) = 8$, czyli

$2a_1 = 12$, skąd otrzymujemy $a_1 = 6$.

b) Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów, podstawiamy $n = 100$ i zapisujemy

$S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = (a_1 + a_{100}) \cdot 50$.

Ponieważ $a_{100} = a_1 + 99 \cdot r$, więc otrzymujemy $a_{100} = 6 + 99 \cdot (-2) = -192$.

Zatem $S_{100} = (6 + (-192)) \cdot 50 = -9300$.

Zapisujemy odpowiedź: Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 6 , a suma stu początkowych wyrazów ciągu jest równa -9300 .

Zadanie 24. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	VII. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń: 3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje:
0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające błędy merytoryczne
1 punkt za zapisanie współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej l: $a=-\frac{1}{2}$.
1 punkt za wykorzystanie faktu, że punkt $P=(4,-1)$ leży na szukanej prostej i zapisanie równania z jedną niewiadomą: $-1=-\frac{1}{2}\cdot 4+b$.
1 punkt za obliczenie współczynnika b i zapisanie równania szukanej prostej: $y=-\frac{1}{2}x+1$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech szukana prosta będzie określona równaniem $y=ax+b$. Ponieważ proste są prostopadłe, więc prawdziwa jest równość

$a\cdot 2=-1$, skąd otrzymujemy $a=-\frac{1}{2}$.

Otrzymaliśmy równanie $y=-\frac{1}{2}x+b$. Teraz skorzystamy z faktu, że punkt $P=(4,-1)$ leży na szukanej prostej prostopadłej do prostej $y=2x+3$. Wynika stąd, że współrzędne tego punktu spełniają równanie $y=-\frac{1}{2}x+b$. Podstawiamy współrzędne punktu P i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$-1=-\frac{1}{2}\cdot(4)+b$, czyli

$-1=-2+b$, skąd otrzymujemy $b=1$.

Zapisujemy odpowiedź: Prosta prostopadła do prostej $y=2x+3$, na której leży punkt $P=(4,-1)$ jest określona równaniem $y=-\frac{1}{2}x+1$.

Zadanie 25. (0–4)

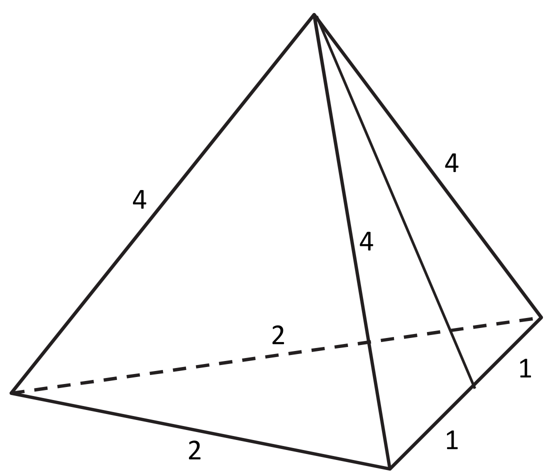
Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	VIII. Stereometria. Uczeń: 1) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości; 2) wykorzystuje własności figur geometrycznych na płaszczyźnie do analizy zagadnień z geometrii przestrzennej.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje:
0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające błędy merytoryczne
1 punkt za obliczenie wysokości ściany bocznej ostrosłupa $h=\sqrt{15}$.
1 punkt za obliczenie pola podstawy tego ostrosłupa: $P_p=\sqrt{3}$ oraz pola powierzchni całkowitej tego ostrosłupa: $P_c=\sqrt{3}+3\sqrt{15}$.
1 punkt za zapisanie, że odcinek łączący wierzchołek podstawy ostrosłupa z punktem będącym spodkiem wysokości ostrosłupa na podstawę ma długość równą $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
1 punkt za zapisanie, że cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

a) Powierzchnię całkowitą tego ostrosłupa tworzy powierzchnia podstawy (trójkąt równoboczny) oraz powierzchnia boczna (trzy trójkąty równoramienne).



Pole P_C powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

$P_C = P_P + P_B$,

gdzie P_P jest polem trójkąta równobocznego o boku długości 2, czyli $P_P = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

oraz $P_B = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h$,

w którym to wzorze $a = 2$ jest długością krawędzi podstawy, h jest wysokością ściany bocznej (patrz rysunek). Wysokość ściany bocznej obliczymy z twierdzenia Pitagorasa

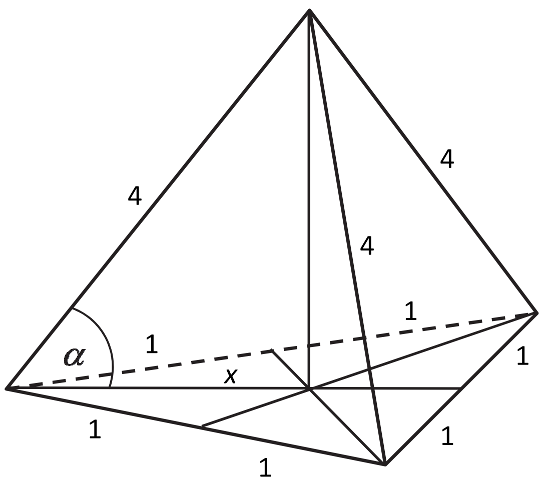
$h^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$,

skąd wynika, że $h = \sqrt{15}$. Zatem $P_B = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{15} = 3\sqrt{15}$.

Szukane pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

$P_C = \sqrt{3} + 3\sqrt{15} = \sqrt{3}\left(1 + 3\sqrt{5}\right)$.

b) Oznaczmy symbolem α kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa (patrz rysunek).



Cosinus tego kąta jest równy $\cos\alpha = \frac{x}{4}$, gdzie x jest długością odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości ostrosłupa. Zauważmy, że x jest jednocześnie promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Zatem $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ oraz $\cos\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Zapisujemy odpowiedź:

a) Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $\sqrt{3}\left(1 + 3\sqrt{5}\right)$.

b) Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Zadanie 26. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	IX. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń: 3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje:
0 punktów za brak rozwiązania lub za rozwiązanie zawierające błędy merytoryczne
1 punkt za obliczenie, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych (liczb trzycyfrowych): $\lvert\Omega\rvert=900$.
1 punkt za obliczenie, ile jest zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $\lvert A\rvert=125$.
1 punkt za obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{5}{36}$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane trójki liczb (a,b,c), gdzie $a\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, natomiast *b* oraz *c* należą do zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $\lvert\Omega\rvert=9\cdot10\cdot10=900$.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającemu na otrzymaniu w wyniku losowania trójek liczb (a,b,c) takich, że każda z liczb a, b, c jest nieparzysta (należy do zbioru $\{1,3,5,7,9\}$), jest równa $\lvert A\rvert=5\cdot5\cdot5=125$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A)=\frac{125}{900}=\frac{5}{36}$.