INFORMATOR
o egzaminie eksternistycznym z matematyki
z zakresu 4-letniego liceum ogólnokształcącego

od sesji jesiennej 2023 r.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2021

Zespół redakcyjny:
Grażyna Miłkowska (CKE)
Mieczysław Fałat (OKE Wrocław)
Mariusz Mroczek (CKE)
dr Wioletta Kozak (CKE)

Recenzenci:
prof. dr hab. Zbigniew Marciniak (UW)
Grażyna Śleszyńska (recenzja nauczycielska)
dr Tomasz Karpowicz (recenzja językowa)

Informator został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 616 33 99
oke@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 01
oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży
Al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 634 91 33
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa
tel. 22 457 03 35
info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
sekretariat@oke.wroc.pl

Spis treści

1. Opis egzaminu eksternistycznego z matematyki z zakresu 4-letniego liceum ogólnokształcącego

WSTĘP

Matematyka jest jednym z przedmiotów obowiązkowych na egzaminie eksternistycznym z zakresu liceum ogólnokształcącego.

Egzamin eksternistyczny z matematyki z zakresu liceum ogólnokształcącego sprawdza, w jakim stopniu zdający spełnia wymagania określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej[1].

Informator prezentuje przykładowy arkusz egzaminacyjny wraz z zasadami oceniania rozwiązań zadań. Do każdego zadania dodano wykaz wymagań ogólnych i szczegółowych z podstawy programowej kształcenia ogólnego, którym odpowiada dane zadanie. *Informator* stanowi przy tym jedynie ogólną, kierunkową pomoc w planowaniu procesu samokształcenia. Zadania nie ilustrują bowiem wszystkich wymagań z zakresu matematyki określonych w podstawie programowej, nie wyczerpują również wszystkich typów zadań, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym. Tylko realizacja wszystkich wymagań z podstawy programowej, zarówno ogólnych, jak i szczegółowych, może zapewnić właściwe przygotowanie do egzaminu eksternistycznego z matematyki.

Na egzaminie eksternistycznym obowiązują **wymagania w zakresie podstawowym**.

ZADANIA NA EGZAMINIE

W arkuszu egzaminacyjnym znajdą się zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte.

Zadania zamknięte to takie, w których zdający wybiera odpowiedź spośród podanych. Wśród zadań zamkniętych znajdą się m.in.:
- zadania wyboru wielokrotnego
- zadania typu prawda – fałsz
- zadania na dobieranie.

Zadania otwarte to takie, w których zdający samodzielnie formułuje odpowiedź. Wśród zadań otwartych znajdą się m.in.:
- zadania z luką, wymagające uzupełnienia zdania albo zapisania odpowiedzi jednym lub kilkoma wyrazami, symbolami lub wyrażeniami matematycznymi określającymi własności obiektów matematycznych, w tym wykonania lub uzupełnienia wykresu, zależności, diagramu, tabeli
- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające wykonania prostego obliczenia lub bezpośredniego zapisania rozwiązania albo zapisania przeprowadzonego rozumowania lub obliczenia – zwykle w dwóch lub trzech etapach

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2018 r. poz. 467, z późn. zm.).

- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego i przedstawienia jej realizacji.

Przedstawione przez zdającego rozwiązanie zadania otwartego, w którym zdający m.in. oblicza, wyznacza, wyprowadza, uzasadnia, wykazuje, musi prezentować pełny tok rozumowania, uwzględniać warunki zadania, a także odwoływać się do twierdzeń matematycznych i własności odpowiednich obiektów matematycznych.

Wszystkie zadania egzaminacyjne będą sprawdzały poziom opanowania umiejętności określonych w następujących wymaganiach ogólnych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla szkoły ponadpodstawowej (w nawiasach zapisano numery celów kształcenia z podstawy programowej):

- sprawność rachunkowa (I)
- wykorzystanie i tworzenie informacji (II)
- wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (III)
- rozumowanie i argumentacja (IV).

Zadania egzaminacyjne będą dotyczyły obszarów tematycznych matematyki wymienionych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla III etapu edukacyjnego. Są to:

I. Liczby rzeczywiste
II. Wyrażenia algebraiczne
III. Równania i nierówności
IV. Układy równań
V. Funkcje
VI. Ciągi
VII. Trygonometria
XIII. Optymalizacja
VIII. Planimetria
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej
X. Stereometria
XI. Kombinatoryka
XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

OPIS ARKUSZA EGZAMINACYJNEGO

Egzamin eksternistyczny z matematyki trwa **120 minut**[2].

W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały pojedyncze zadania lub wiązki zadań. Wiązka zadań może zawierać od dwóch do czterech zadań występujących we wspólnym kontekście. Wiązka zadań może się składać z zadań zamkniętych i zadań otwartych. Niektóre zadania będą wymagały skorzystania z zamieszczonych w arkuszu rysunków, wykresów, diagramów lub tabel.

Liczbę zadań w arkuszu egzaminacyjnym oraz liczbę punktów możliwych do uzyskania za poszczególne rodzaje zadań przedstawiono w poniższej tabeli.

Rodzaj zadania	Liczba zadań	Łączna liczba punktów	Udział w wyniku sumarycznym
zamknięte	19–22	ok. 20	ok. 50%
otwarte	6–10	ok. 20	ok. 50%
RAZEM	**25–32**	**40**	**100%**

Zdający rozwiązuje zadania bezpośrednio w arkuszu egzaminacyjnym.

ZASADY OCENIANIA

Zadania zamknięte

Zadania zamknięte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

ALBO

2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
1 pkt – odpowiedź częściowo poprawna lub odpowiedź niepełna.
0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadania otwarte

Za w pełni poprawne rozwiązanie zadania otwartego będzie można otrzymać maksymalnie 1, 2, 3 lub 4 punkty. Za każde rozwiązanie inne niż opisane w zasadach oceniania można otrzymać maksymalną liczbę punktów, o ile rozwiązanie jest merytorycznie poprawne, zgodne z poleceniem i warunkami zadania.

---

[2] Czas trwania egzaminu może zostać wydłużony w przypadku zdających ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, w tym niepełnosprawnych. Szczegóły są określane w *Komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w sprawie szczegółowych sposobów dostosowania warunków i form przeprowadzania egzaminu eksternistycznego* dla danej sesji egzaminacyjnej.

Zadania otwarte są oceniane – w zależności od maksymalnej liczby punktów, jaką można uzyskać za rozwiązanie danego zadania – zgodnie z poniższymi zasadami:

Zadania otwarte z luką

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

  1 pkt – rozwiązanie poprawne.
  0 pkt – rozwiązanie niepełne lub niepoprawne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie całkowicie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie częściowo poprawne lub rozwiązanie niepełne.
  0 pkt – rozwiązanie całkowicie niepoprawne albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 1 pkt:

  1 pkt – rozwiązanie poprawne.
  0 pkt – rozwiązanie niepełne lub niepoprawne albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 2 pkt:

  2 pkt – rozwiązanie poprawne.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, albo brak rozwiązania.

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 3 pkt:

  3 pkt – rozwiązanie poprawne.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym dokonany został istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

- w przypadku zadania, za którego rozwiązanie można otrzymać maksymalnie 4 pkt:

  4 pkt – rozwiązanie poprawne.
  3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci.
  2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania.
  1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania.
  0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania.

Etapy rozwiązania dla każdego zadania (niewielki postęp, istotny postęp, zasadnicze trudności zadania) będą opisane w zasadach oceniania dla danego zadania. Ponadto dla różnych sposobów rozwiązania danego zadania te same etapy będą opisywały w zasadach oceniania jakościowo równoważny postęp na drodze do rozwiązania zadania.

MATERIAŁY I PRZYBORY POMOCNICZE NA EGZAMINIE Z MATEMATYKI

Przybory pomocnicze, z których mogą korzystać zdający na egzaminie eksternistycznym z matematyki, to:

- linijka
- cyrkiel
- kalkulator prosty*
- *Zestaw wybranych wzorów matematycznych.*

* Kalkulator prosty – jest to kalkulator, który umożliwia wykonywanie tylko dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, ewentualnie obliczanie procentów lub pierwiastków kwadratowych z liczb.

Szczegółowe informacje dotyczące materiałów i przyborów pomocniczych, z których mogą korzystać zdający na egzaminie eksternistycznym z matematyki (w tym osoby, którym dostosowano warunki przeprowadzania egzaminu), będą ogłaszane w komunikacie dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

2. Przykładowy arkusz egzaminacyjny z zasadami oceniania rozwiązań zadań

W *Informatorze* zamieszczono *Przykładowy arkusz egzaminacyjny* oraz *Zasady oceniania rozwiązań zadań*. Przy każdym zadaniu w arkuszu – po numerze zadania – podano maksymalną liczbę punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie. W *Zasadach oceniania rozwiązań zadań* dla każdego zadania podano:

- wymagania ogólne i szczegółowe z podstawy programowej, które są sprawdzane w tym zadaniu
- zasady oceniania rozwiązania tego zadania
- poprawne rozwiązanie każdego zadania zamkniętego oraz przykładowe rozwiązanie każdego zadania otwartego.

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

PESEL *(wypełnia zdający)*	**LMAP–100–23XX**

EGZAMIN EKSTERNISTYCZNY
Z MATEMATYKI

LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

DATA: **[dzień miesiąc rok]**
CZAS PRACY: **120 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **40**

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 23 strony (zadania 1–26). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. W rozwiązaniach zadań otwartych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku oraz pamiętaj o jednostkach.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych*, linijki, cyrkla oraz kalkulatora prostego.
8. Na tej stronie i na karcie punktowania wpisz swój numer PESEL. Na karcie punktowania zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Pamiętaj, że w razie stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań egzaminacyjnych lub zakłócenia prawidłowego przebiegu egzaminu w sposób, który utrudnia pracę pozostałym osobom zdającym, przewodniczący zespołu nadzorującego przerywa i unieważnia egzamin eksternistyczny.

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{4^7 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ jest równa

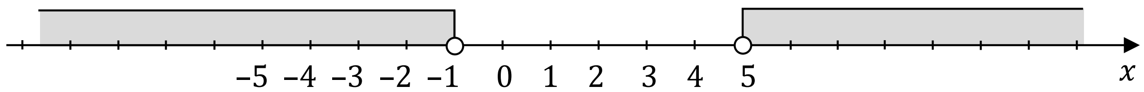
A. 2^{14} **B.** 2^{15} **C.** 2^{16} **D.** 2^{21}

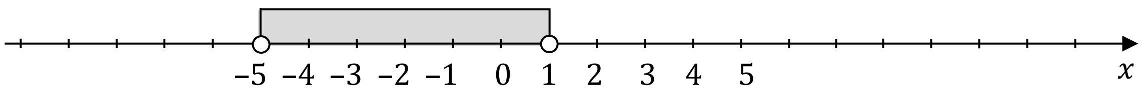
Zadanie 2. (0–1)

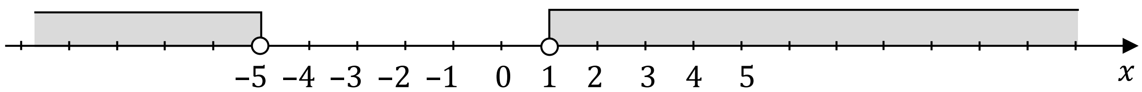
Dana jest nierówność:

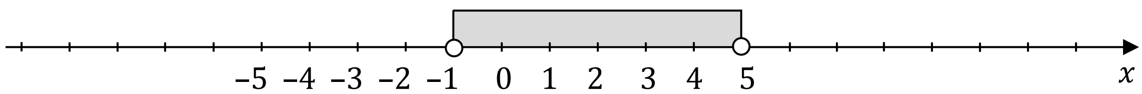
$$|x+2| > 3$$

Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.


B.


C.


D.


Zadanie 3. (0–1)

Pan Kowalski wpłacił do banku $10\,000$ zł na dwuletnią lokatę z <u>rocznym</u> oprocentowaniem równym 2% (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Po upływie roku odsetki z tej lokaty były równe $200{,}00$ zł.	**P**	**F**
Po dwóch latach oszczędzania pan Kowalski miał na lokacie dokładnie $10\,400.00$ zł.	**P**	**F**

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 4. (0–2)

Oblicz wartość wyrażenia $\log_2 25 - 2\log_2 10$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2$ jest równa

A. $21 - 6\sqrt{6}$ **B.** $21 - 6\sqrt{5}$ **C.** 15 **D.** 21

Zadanie 6. (0–1)

Dana jest liczba $a = 2^{19} + 2^{20}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1. albo 2.

Liczba a

A.	jest podzielna przez 3,	ponieważ	**1.**	$a = 3 \cdot 2^{19}$
B.	nie jest podzielna przez 3,		**2.**	$a = 2^{39}$

Zadanie 7. (0–1)

Obwód prostokąta jest równy 40. Długość jednego boku tego prostokąta jest o 20% większa od długości drugiego boku. Niech a i b oznaczają długości boków tego prostokąta.

Który układ równań opisuje zależności między długościami boków tego prostokąta? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\begin{cases} a + b = 40 \\ a = b + 20\% \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a + b = 40 \\ a = 1{,}2b \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a + b = 20 \\ a = b + 20\% \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a + b = 20 \\ a = 1{,}2b \end{cases}$

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 8.

Dane jest równanie $x^3 + \sqrt{3} \cdot x^2 - 2x - 2\sqrt{3} = 0$.

Zadanie 8.1. (0–1)

Wykaż, bez rozwiązywania równania, że liczba 3 nie jest rozwiązaniem tego równania.

Zadanie 8.2. (0–3)

Wyznacz wszystkie rozwiązania tego równania. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 9. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = \left(2, -\sqrt{5}\right)$ leży na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = ax + 3\sqrt{5}$.

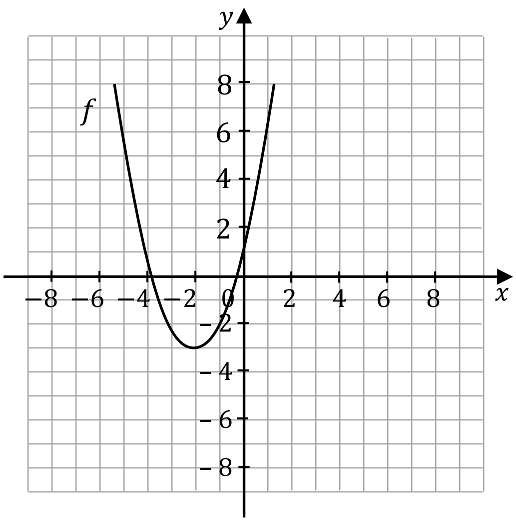
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik a we wzorze tej funkcji jest równy

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $1 + \sqrt{5}$ **C.** $-\sqrt{5}$ **D.** $-2\sqrt{5}$

Zadanie 10.

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + 4x + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y).



Zadanie 10.1. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3, +\infty)$.	**P**	**F**
Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$.	**P**	**F**

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 10.2. (0–2)

Oblicz miejsca zerowe funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10.3. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -3,\ 2\rangle$ jest równa ……………. .

Zadanie 11. (0–1)

Trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy $a_{13} = 34$. Różnica r tego ciągu jest równa 3.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $a_1 = -5$ **B.** $a_1 = -2$ **C.** $a_1 = 2$ **D.** $a_1 = 5$

Zadanie 12. (0–1)

Trzywyrazowy ciąg $(2x - 5,\ -3, 9)$ jest ciągiem geometrycznym.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba x jest równa

A. -5 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 7

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 13. (0–1)

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

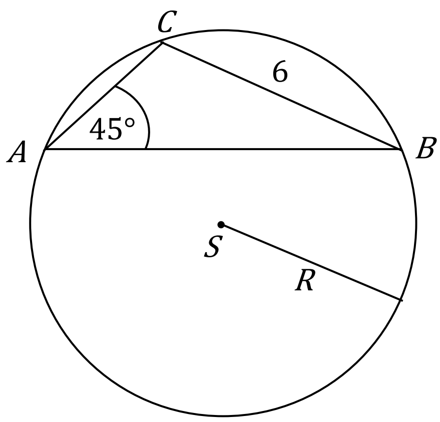
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $1 + \mathrm{tg}\,\alpha$ jest równa

A. $\frac{5}{3}$ **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{11}{5}$

Zadanie 14. (0–2)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = 6$ i $|\sphericalangle BAC| = 45°$. Na trójkącie ABC opisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu R (zobacz rysunek).

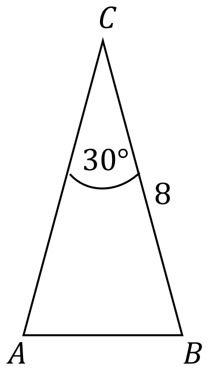


Oblicz długość promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 15. (0–1)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są: $|AC| = |BC| = 8$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek).

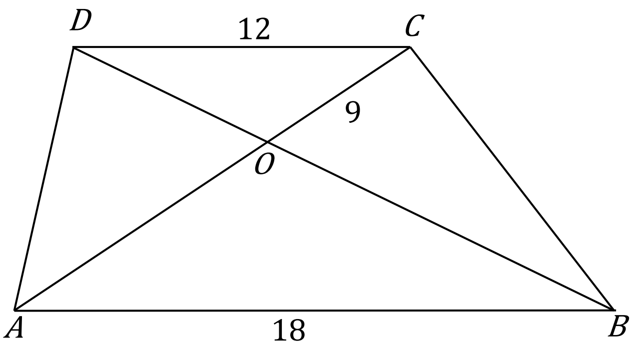


Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Pole trójkąta ABC jest równe ………………… .

Zadanie 16. (0–1)

Dany jest trapez $ABCD$, w którym podstawa AB ma długość 18, a podstawa CD ma długość 12. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie O i długość odcinka OC jest równa 9 (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

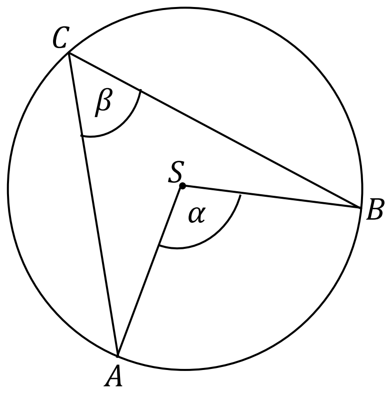
Długość przekątnej AC tego trapezu jest równa

A. 13,5 **B.** 22,5 **C.** 24 **D.** 33

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 17. (0–1)

Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S. Na łuku AB są oparte dwa kąty: kąt wpisany β oraz kąt środkowy α (zobacz rysunek). Suma miar tych kątów jest równa $\alpha + \beta = 156°$.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta środkowego α jest równa

A. $\alpha = 52°$ **B.** $\alpha = 78°$ **C.** $\alpha = 104°$ **D.** $\alpha = 108°$

Zadanie 18. (0–1)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (4, -2)$ i $C = (-8, 6)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta $ABCD$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość przekątnej BD tego prostokąta jest równa

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $4\sqrt{10}$ **D.** $4\sqrt{13}$

Zadanie 19. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1. albo 2.

Prosta określona równaniem $y = -2x + 3$ jest równoległa do prostej o równaniu

<table>
<tr><td>A.</td><td>$y = -\frac{1}{2}x + 3$</td><td rowspan="2">i jednocześnie jest prostopadła do prostej o równaniu</td><td>1.</td><td>$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td>B.</td><td>$y = -2x - \frac{1}{3}$</td><td>2.</td><td>$y = 2x - 3$</td></tr>
</table>

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

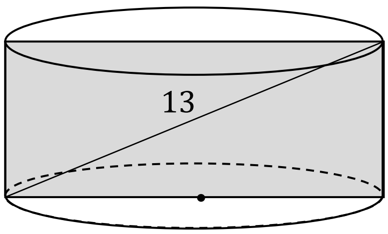
Zadanie 20. (0–2)

Dany jest okrąg o równaniu $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

Sprawdź, czy środek tego okręgu leży na prostej o równaniu $y=3x-8$. Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Zadanie 21. (0–1)

Obwód podstawy walca jest równy 12π. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o przekątnej długości 13 (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wysokość tego walca jest równa 5.	**P**	**F**
Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe 132π.	**P**	**F**

Zadanie 22. (0–1)

Objętość pewnej kuli jest równa 36π.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

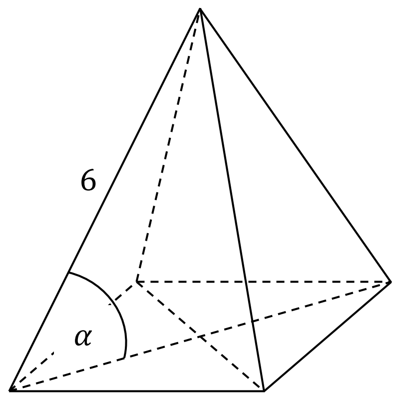
Średnica tej kuli jest równa

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 12

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 23. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość równą 6 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod takim kątem α, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ (zobacz rysunek).



Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0–1)

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe, w których zapisie mogą występować wyłącznie cyfry $1, 2, 3, 4$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

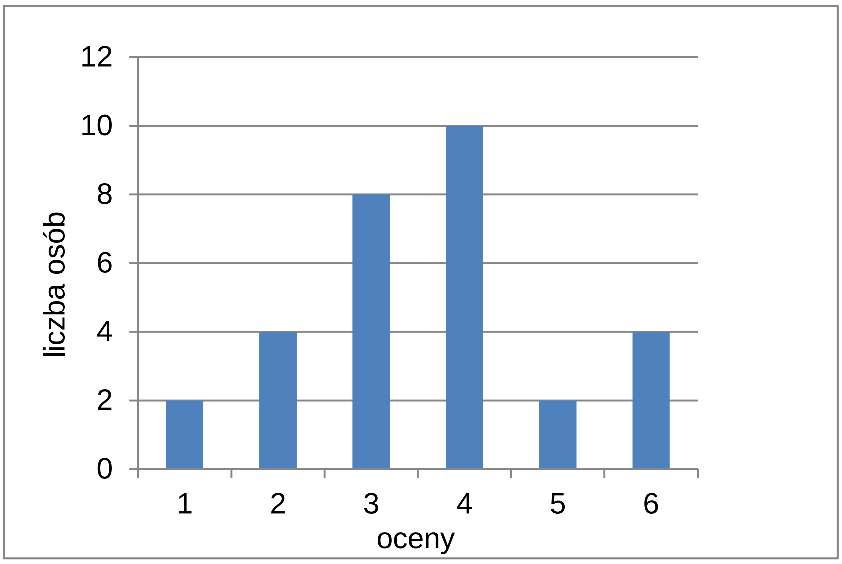
Liczb pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować wyłącznie cyfry $1, 2, 3, 4$, jest

A. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ **B.** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ **C.** $5 + 4$ **D.** $4 + 4 + 4 + 4 + 4$

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

Zadanie 25. (0–1)

Na diagramie słupkowym przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki wszystkich uczniów pewnej klasy.



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Dominanta ocen uzyskanych przez uczniów z tego sprawdzianu jest równa 6.	**P**	**F**
Mediana ocen uzyskanych przez uczniów z tego sprawdzianu jest równa 4.	**P**	**F**

Zadanie 26. (0–3)

Do przeprowadzenia loterii szkolnej przygotowano losy wygrywające oraz losy przegrywające. Liczba losów przegrywających jest o 95 większa od liczby losów wygrywających. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że zakupiony na tej loterii jeden los okaże się losem wygrywającym, jest równe $\frac{1}{7}$.

Oblicz, ile losów przygotowano na tę loterię. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Uwaga
Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także z użyciem kalkulatora, stosowanie praw działań podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności do rozwiązywania problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje […] nierówności typu: […] $\lvert x-2\rvert < 3$ […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
PF

Zadanie 4. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także z użyciem kalkulatora, stosowanie praw działań podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności do rozwiązywania problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; 9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości wyrażenia i podanie prawidłowego wyniku: (-2).

1 pkt – poprawne przekształcenie podanego wyrażenia i doprowadzenie go do postaci: $\log_2 0{,}25$ lub $\log_2 \frac{1}{4}$ lub $-2\log_2 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I sposób

Przekształcamy podane wyrażenie, stosując wzór na logarytm ilorazu:

$$\log_2 25 - 2\log_2 10 = \log_2 25 - \log_2 10 - \log_2 10 = \log_2 \frac{25}{10} - \log_2 10 = \log_2 2{,}5 - \log_2 10 =$$
$$= \log_2 \frac{2{,}5}{10} = \log_2 0{,}25$$

Na podstawie definicji logarytmu, obliczamy wartość x:

$\log_2 0{,}25 = x$, to $2^x = \frac{1}{4}$
$2^x = 4^{-1}$
$2^x = 2^{-2}$
$x = -2$

II sposób

Przekształcamy podane wyrażenie, stosując wzór na logarytm potęgi i logarytm iloczynu:

$$\log_2 25 - 2\log_2 10 = \log_2 5^2 - 2\log_2(2 \cdot 5) = 2\log_2 5 - 2\log_2 2 - 2\log_2 5 = -2\log_2 2 =$$
$$= -2 \cdot 1 = -2$$

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także z użyciem kalkulatora, stosowanie praw działań podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności do rozwiązywania problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	II. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^3+b^3, a^n-b^n.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.	I. Liczby rzeczywiste. Zdający: 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A1

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych podczas rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych.	IV. Układy równań. Zdający: 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 8.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	III. Równania i nierówności. Zdający: 6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia dla $x = 3$, tj. $21 + 7\sqrt{3}$ i zapisanie wniosku, że liczba 3 nie jest rozwiązaniem równania $x^3 + \sqrt{3} \cdot x^2 - 2x - 2\sqrt{3} = 0$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sprawdzamy, czy dla $x = 3$ lewa strona równania $x^3 + \sqrt{3} \cdot x^2 - 2x - 2\sqrt{3} = 0$ przyjmuje wartość zero.
Obliczamy wartość wyrażenia:
$3^3 + \sqrt{3} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2\sqrt{3} = 27 + 9\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3} = 21 + 7\sqrt{3}$

Ponieważ $21 + 7\sqrt{3} \neq 0$, liczba 3 nie jest rozwiązaniem tego równania.

Zadanie 8.2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	III. Równania i nierówności. Zdający: 6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równań i podanie prawidłowych rozwiązań: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.
2 pkt – zapisanie alternatywy dwóch równań w postaci: $x + \sqrt{3} = 0$ lub $x^2 - 2 = 0$.
1 pkt – przekształcenie lewej strony równania do postaci iloczynu dwóch wyrażeń: $\left(x + \sqrt{3}\right)(x^2 - 2) = 0$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązujemy podane równanie – najpierw lewą stronę równania zapisujemy w postaci iloczynu. W tym celu grupujemy parami wyrazy po lewej stronie równania (pierwszy i drugi oraz trzeci i czwarty) i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias. Zapisujemy kolejno:

$$x^2\left(x + \sqrt{3}\right) - 2\left(x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\left(x + \sqrt{3}\right)(x^2 - 2) = 0$$

Ponieważ lewa strona równania jest iloczynem dwóch wyrażeń, który jest równy zeru, wynika stąd, że przynajmniej jedno z tych wyrażeń przyjmuje wartość zero.
Otrzymujemy zatem dwa równania:

$$x + \sqrt{3} = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 2 = 0$$

Rozwiązaniem pierwszego równania jest $x = -\sqrt{3}$.

Ponieważ lewa strona równania $x^2 - 2 = 0$ jest różnicą kwadratów dwóch wyrażeń, stosujemy jeden ze wzorów skróconego mnożenia.

$$\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$

Podobnie jak zapisaliśmy wyżej, z iloczynu równego zeru wnioskujemy, że

$$x - \sqrt{2} = 0 \text{ lub } x + \sqrt{2} = 0$$

zatem

$$x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2}$$

Dane równanie ma trzy rozwiązania: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	V. Funkcje. Zdający: 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 10.1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów […].	V. Funkcje. Zdający: 4) odczytuje z wykresu funkcji: […] zbiór wartości […] przedziały monotoniczności […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Zadanie 10.2. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	III. Równania i nierówności. Zdający: 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia miejsc zerowych funkcji i podanie prawidłowego wyniku:
$x_1 = -2-\sqrt{3}, \quad x_2 = -2+\sqrt{3}$.

1 pkt – poprawne obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego: $\Delta = 12$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Miejsca zerowe funkcji f wyznaczamy z równania $x^2+4x+1=0$.
Obliczamy wyróżnik podanego trójmianu kwadratowego:
$\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 16-4 = 12$
Ponieważ $\Delta > 0$, to funkcja f ma dwa miejsca zerowe: x_1 i x_2

$$x_1 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3}$$

Zadanie 10.3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów […].	V. Funkcje. Zdający: 10) wyznacza największą […] wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawna metoda obliczenia największej wartości funkcji w podanym przedziale i podanie prawidłowego wyniku: $f(2) = 13$.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie

Z wykresu wnioskujemy, że największą wartość funkcja f przyjmuje dla argumentu 2.

Obliczamy $f(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 4 + 8 + 1 = 13$

Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -3,\ 2\rangle$ jest równa ….13…. .

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VI. Ciągi. Zdający: 5) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VI. Ciągi. Zdający: 6) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VII. Trygonometria. Zdający: 4) korzysta ze wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

C

Zadanie 14. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.	VII. Trygonometria. Zdający: 5) stosuje twierdzenie sinusów […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia długości promienia okręgu opisanego na trójkącie i podanie prawidłowego wyniku: $R = \frac{6}{\sqrt{2}}$ lub $R = 3\sqrt{2}$.
1 pkt – zapisanie poprawnego równania wynikającego z twierdzenia sinusów.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zapisujemy równanie wynikające z twierdzenia sinusów:

$$\frac{|BC|}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

$$2R = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{12}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych podczas rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych.	VII. Trygonometria. Zdający: 5) stosuje […] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$.

Zasady oceniania

1 pkt – poprawna metoda obliczenia pola trójkąta i podanie prawidłowego wyniku: $P = 16$.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Pełne rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16$$

Pole trójkąta ABC jest równe …16…….. .

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.	VIII. Planimetria. Zdający: 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	VIII. Planimetria. Zdający: 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 2) posługuje się równaniami prostej na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej […], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach […] znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B1

Zadanie 20. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.	IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej […]; 4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne podstawienie współrzędnych środka danego okręgu do równania prostej i zapisanie prawidłowego wniosku – środek tego okręgu nie leży na prostej o danym równaniu.

1 pkt – zapisanie, że środkiem danego okręgu jest punkt o współrzędnych $(2,-3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z równania okręgu $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ odczytujemy współrzędne środka tego okręgu $(2,-3)$. Współrzędne środka okręgu podstawiamy do równania prostej $y=3x-8$.

Mamy:

$$-3=3\cdot 2-8$$

$$-3\neq -2$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że punkt będący środkiem okręgu nie leży na prostej o danym równaniu.

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	X. Stereometria. Zdający: 6) oblicza […] pola powierzchni […] walca […] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

PP

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	X. Stereometria. Zdający: 6) oblicza objętości […] kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

B

Zadanie 23. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii podczas rozwiązywania zadań, również w sytuacjach nietypowych.	X. Stereometria. Zdający: 6) oblicza objętości […] ostrosłupów […] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania rozwiązań I i II sposobem

4 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości ostrosłupa i zapisanie prawidłowego wyniku: $V = \frac{64\sqrt{5}}{3}$.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola P_p podstawy ostrosłupa i podanie prawidłowego wyniku: $P_p = 32$

LUB

– poprawna metoda obliczenia długości a krawędzi podstawy ostrosłupa i podanie wyniku: $a = 4\sqrt{2}$.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia wysokości H ostrosłupa i zapisanie wyniku: $H = 2\sqrt{5}$.

1 pkt – poprawna metoda obliczenia długości x odcinka stanowiącego połowę długości przekątnej podstawy tego ostrosłupa : $x = 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania rozwiązań III sposobem

4 pkt – poprawna metoda obliczenia objętości ostrosłupa i zapisanie prawidłowego wyniku: $V = \frac{64\sqrt{5}}{3}$.

3 pkt – poprawna metoda obliczenia pola P_p podstawy ostrosłupa i podanie prawidłowego wyniku: $P_p = 32$.

2 pkt – poprawna metoda obliczenia długości x odcinka, stanowiącego połowę długości przekątnej podstawy tego ostrosłupa: $x = 4$.

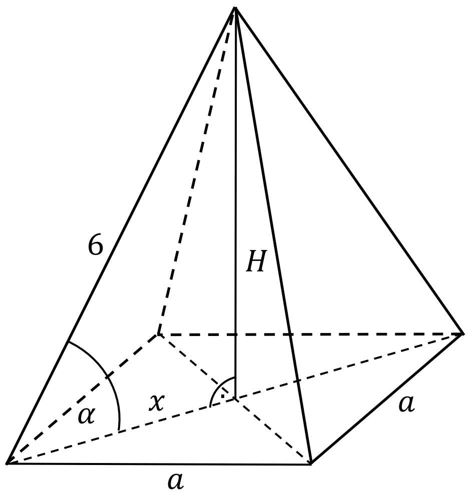
1 pkt – poprawna metoda obliczenia sinusa kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ oraz poprawne obliczenie wysokości tego ostrosłupa $H = 2\sqrt{5}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I sposób

Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa, H – wysokość ostrosłupa, x – długość połowy przekątnej podstawy (zobacz rysunek pomocniczy).



Ponieważ dany jest cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy, korzystamy z definicji cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o bokach: x, H, 6. Zapisujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{x}{6} = \cos\alpha, \text{ zatem } \frac{x}{6} = \frac{2}{3}$$

Stąd wynika, że $x = 4$. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy wysokość tego ostrosłupa:

$$H^2 + x^2 = 6^2$$
$$H^2 = 36 - 16 = 20$$
$$H = 2\sqrt{5}$$

Długość przekątnej podstawy ostrosłupa jest równa $2x = 8$. Ponieważ podstawa ostrosłupa jest kwadratem, jej pole jest równe $P_p = \frac{1}{2} \cdot (2x)^2$. Po podstawieniu otrzymujemy:

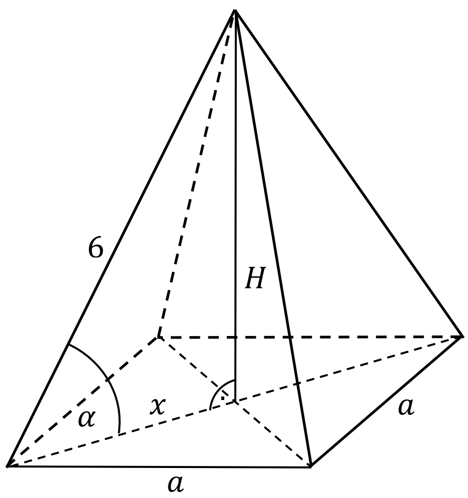
$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$$

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{64\sqrt{5}}{3}$$

II sposób

Niech a oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa, H – wysokość ostrosłupa, x – długość połowy przekątnej podstawy ostrosłupa (zobacz rysunek pomocniczy).



Długość x odcinka będącego połową długości przekątnej podstawy ostrosłupa możemy obliczyć z definicji cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o bokach: x, H, 6. Zapisujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{x}{6} = \cos\alpha, \quad \text{zatem} \quad \frac{x}{6} = \frac{2}{3}$$

Stąd wynika, że $x = 4$. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy wysokość tego ostrosłupa:

$$H^2 + x^2 = 6^2$$
$$H^2 = 36 - 16 = 20$$
$$H = 2\sqrt{5}$$

Podstawa ostrosłupa jest kwadratem, zatem długość jego przekątnej jest równa $2x = a\sqrt{2}$.

Na podstawie tej zależności i obliczonego $x = 4$ możemy wyznaczyć długość a krawędzi podstawy ostrosłupa:

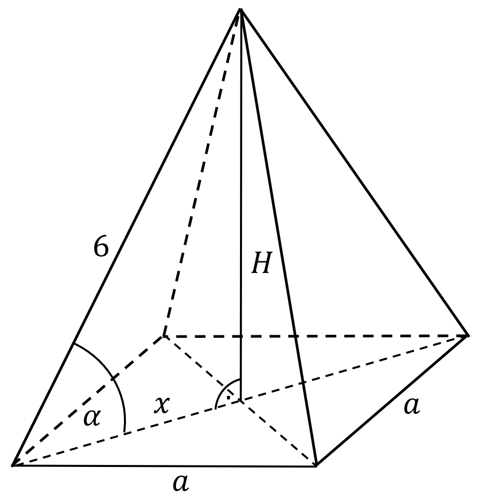
$$a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Objętość tego ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{64\sqrt{5}}{3}$$

III sposób

Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa, H – wysokość ostrosłupa, x – długość połowy przekątnej podstawy (zobacz rysunek pomocniczy).



Dany jest $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, zatem na podstawie równości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ możemy obliczyć sinus tego kąta:

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Stąd wynika, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ponieważ $\sin \alpha = \frac{H}{6}$, więc $H = 6 \cdot \sin \alpha$

$$H = 6 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość x odcinka stanowiącego połowę przekątnej podstawy ostrosłupa:

$$H^2 + x^2 = 6^2, \text{ skąd mamy } x^2 = 6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 36 - 20 = 16$$

Stąd $x = 4$.

Podstawa ostrosłupa jest kwadratem, zatem długość jego przekątnej jest równa $2x = a\sqrt{2}$.

Na podstawie tej zależności i obliczonego $x = 4$ możemy wyznaczyć długość a krawędzi podstawy ostrosłupa i obliczyć pole P_p podstawy:

$$a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$P_p = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$$

Objętość ostrosłupa jest równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{64\sqrt{5}}{3}$$

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.	XI. Kombinatoryka. Zdający: 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 25. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający: 3) […] znajduje medianę i dominantę.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
FP

Zadanie 26. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych podczas rozwiązywania problemów praktycznych i teoretycznych.	XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zdający: 1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i zapisanie prawidłowego wyniku – na loterię przygotowano 133 losy.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą wynikającego z prawdopodobieństwa zdarzenia polegającego na tym, że zakupiony jeden los na tej loterii okaże się losem wygrywającym, np. $\frac{w}{2w+95} = \frac{1}{7}$

LUB

– zapisanie równania z jedną niewiadomą wynikającego z prawdopodobieństwa zdarzenia polegającego na tym, że zakupiony jeden los na tej loterii okaże się losem przegrywającym, np. $\frac{p}{2p-95} = \frac{6}{7}$.

1 pkt – zapisanie wyrażeń opisujących liczbę losów wygrywających i liczbę wszystkich losów, przygotowanych na tę loterię, np. w i $2w + 95$

LUB

– zapisanie wyrażeń opisujących liczbę losów przegrywających i liczbę wszystkich losów, przygotowanych na tę loterię, np. p i $2p - 95$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I sposób

Niech w oznacza liczbę losów wygrywających, przygotowanych na tę loterię.
Wtedy $w + 95$ jest liczbą losów przegrywających.
Zatem łącznie na tę loterię przygotowano $2w + 95$ wszystkich losów.
Ponieważ jest dane prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego przy zakupie jednego losu, więc możemy zapisać równanie:

$$\frac{w}{2w+95} = \frac{1}{7}$$

Przekształcamy równanie i otrzymujemy:

$$7w = 2w + 95$$
$$5w = 95$$
$$w = 19$$

Na tę loterię przygotowano łącznie $2 \cdot 19 + 95 = 38 + 95 = 133$ losy.

II sposób

Niech p oznacza liczbę losów przegrywających, przygotowanych na tę loterię.
Wtedy $p - 95$ jest liczbą losów wygrywających.
Zatem łącznie na tę loterię przygotowano $2p - 95$ wszystkich losów.
Jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego przy zakupie jednego losu jest równe $\frac{1}{7}$, to prawdopodobieństwo wylosowania losu przegrywającego wynosi $\frac{6}{7}$.
Zatem możemy zapisać równanie:

$$\frac{p}{2p-95} = \frac{6}{7}$$

Przekształcamy równanie i otrzymujemy:

$$7p = 6(2p - 95)$$
$$7p = 12p - 570$$
$$5p = 570$$
$$p = 114$$

Na tę loterię przygotowano łącznie $2 \cdot 114 - 95 = 228 - 95 = 133$ losy.