Zestaw wybranych wzorów matematycznych

1. Wartość bezwzględna liczby

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \qquad |-x| = |x|$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$|x - a| \leq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x - a| \geq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x \leq a - r \quad \text{lub} \quad x \geq a + r$$

2. Potęgi i pierwiastki

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.
  W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

  Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

  W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

  – dla $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad$ oraz $\quad a^0 = 1$

  – dla $a \geq 0$: $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

  – dla $a > 0$: $\quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

- Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.
Jeżeli $a \in (0, 1)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x > y$.
Jeżeli $a \in (1, +\infty)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x < y$.

3. LOGARYTMY

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b:

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0, y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

4. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

5. FUNKCJA KWADRATOWA

- <u>Wyróżnikiem</u> Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

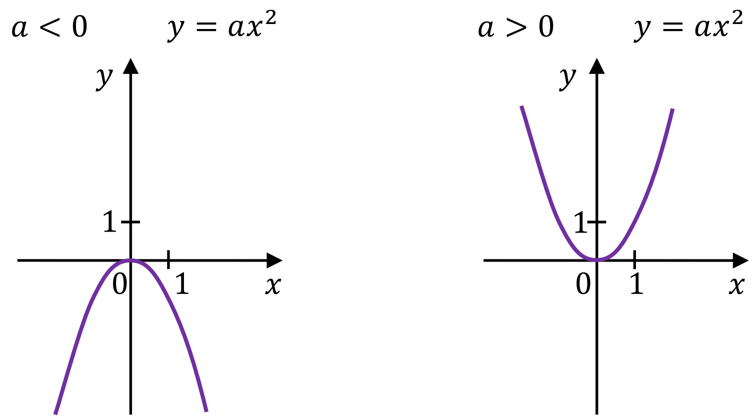
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- <u>Postać ogólna funkcji kwadratowej</u>: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$.

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$\boxed{W = (p, q) \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.



- <u>Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej</u> $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ:

1. jeżeli $\boldsymbol{\Delta > 0}$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

2. jeżeli $\boldsymbol{\Delta = 0}$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$\boxed{x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}}$$

3. jeżeli $\boldsymbol{\Delta < 0}$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- <u>Postać kanoniczna funkcji kwadratowej</u>:

$$\boxed{f(x) = a(x - p)^2 + q}$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przestawić w <u>postaci iloczynowej</u>

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

6. CIĄGI

- Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad\qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

- Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{dla} \quad q \neq 1 \qquad\qquad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla} \quad q = 1$$

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

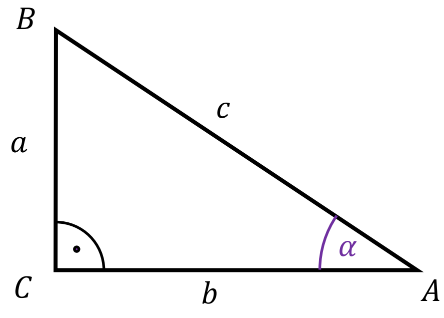
7. TRYGONOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



- <u>Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta</u>

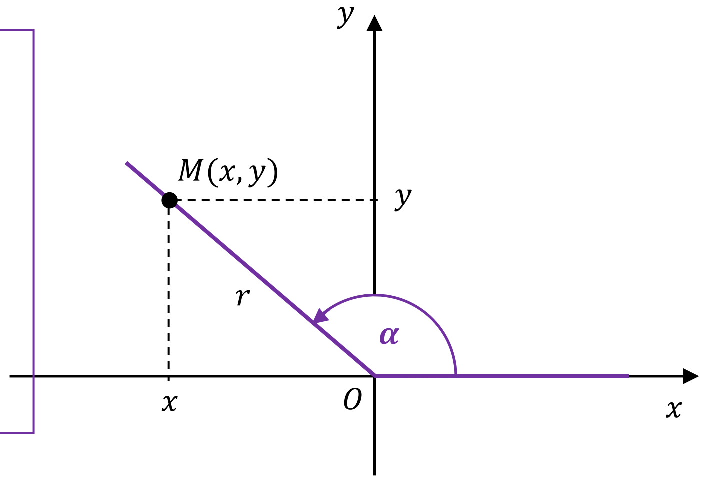
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{o ile } x \neq 0$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



- <u>Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta</u>

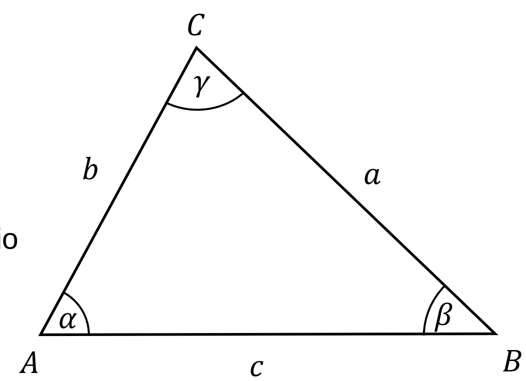
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- <u>Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów</u>

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

8. PLANIMETRIA



Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:

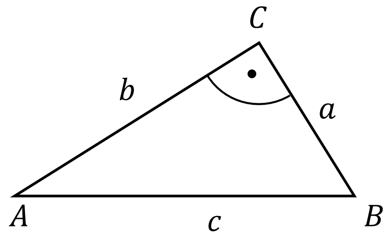
a, b, c – długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących – odpowiednio – przy wierzchołkach A, B oraz C

R, r – długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków A, B i C.

- <u>Twierdzenie Pitagorasa</u> (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)



Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- <u>Twierdzenie cosinusów</u>

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

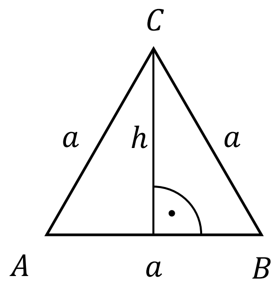
- <u>Wzory na pole trójkąta ABC:</u>

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin\beta$$

- <u>Związki miarowe w trójkącie równobocznym</u>

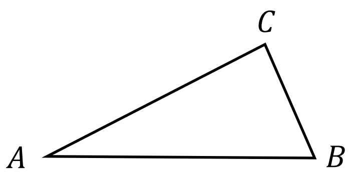
a – długość boku trójkąta równobocznego
h – wysokość trójkąta równobocznego

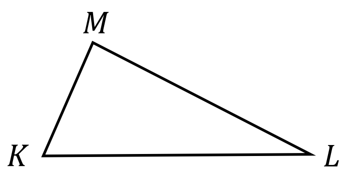


$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \qquad R = \frac{2}{3}h$$

- <u>Cechy przystawania trójkątów</u>





a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$.

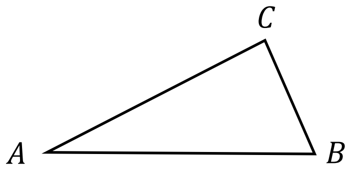
b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

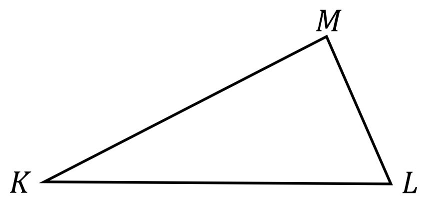
długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle LKM|$.

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM:

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM, np.: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|AB| = |KL|$.

- <u>Cechy podobieństwa trójkątów</u>





a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$.

b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.:
$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$ i $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$.

c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM:

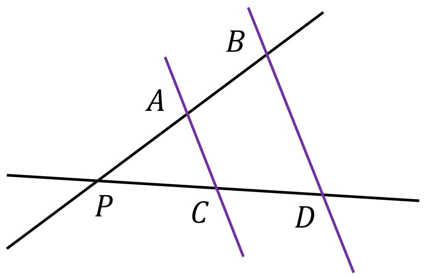
kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM, np.:
$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$.

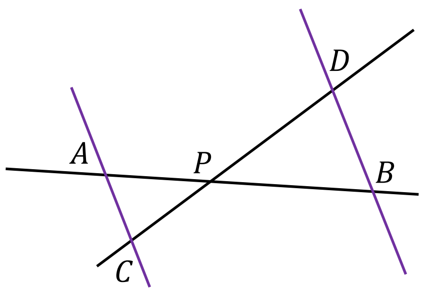
- <u>Twierdzenie Talesa</u>

Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym spełniony jest jeden z warunków:

– punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
LUB
– punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD.

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$.

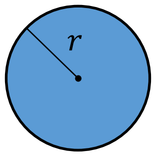




- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

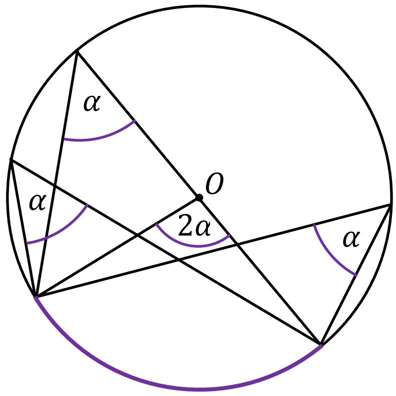
$$P = \pi r^2$$



Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$

- Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

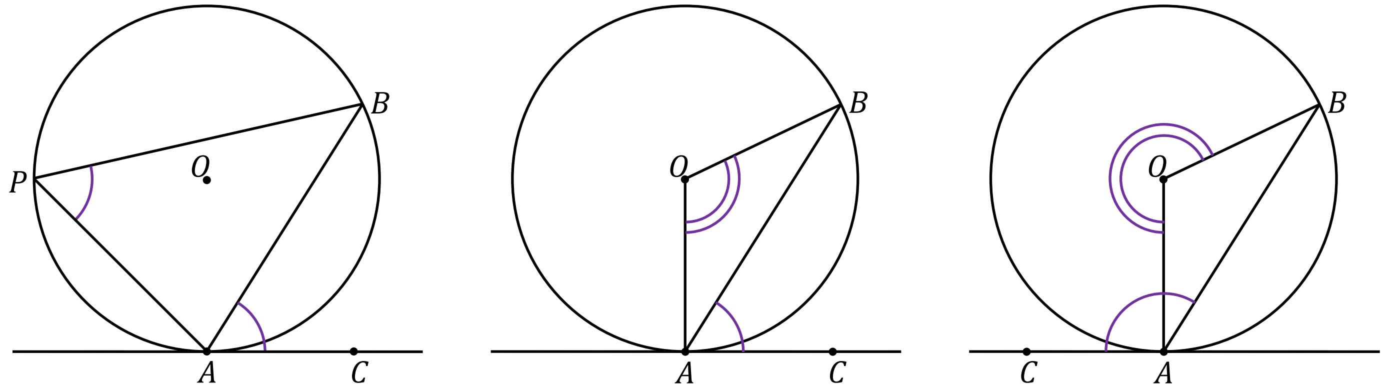
Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O, opartych na tym samym łuku, są równe.

- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A, natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB. Wtedy

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

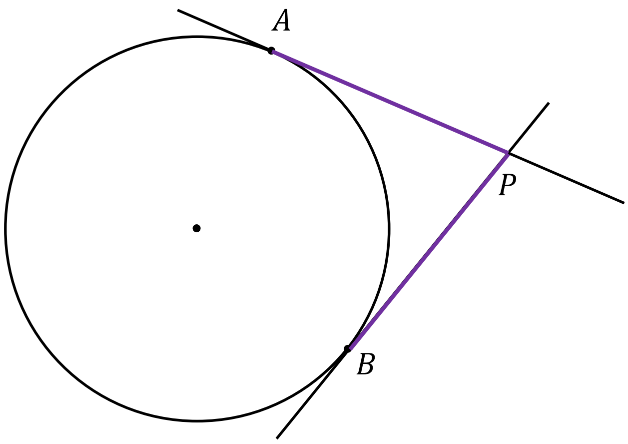
przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.



- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to

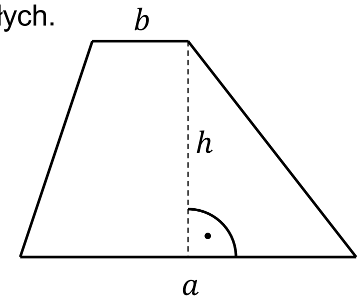
$$|PA| = |PB|$$



- Czworokąty

Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole P trapezu:

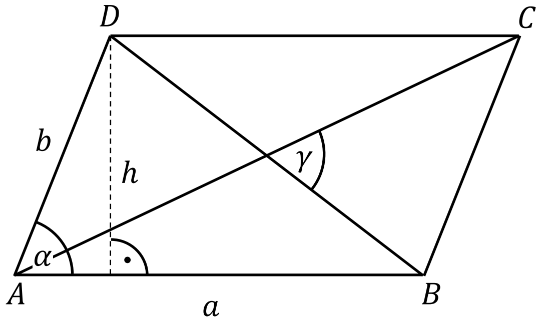
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \qquad P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

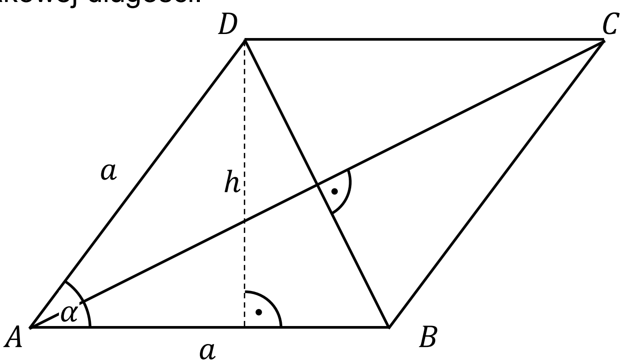
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\gamma$$



Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \qquad P = a^2 \cdot \sin\alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



- Pola figur podobnych

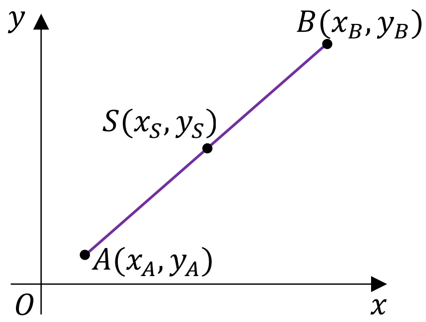
Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k, to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

9. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

- Długość odcinka

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A=(x_A,y_A)$ oraz $B=(x_B,y_B)$ jest równa:



$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

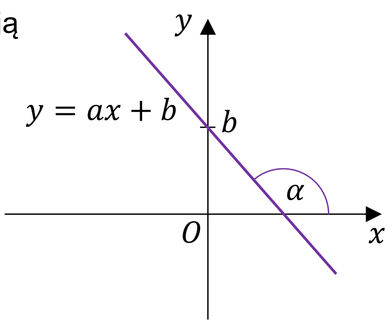
- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S=(x_S,y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A=(x_A,y_A)$ oraz $B=(x_B,y_B)$ są równe:

$$x_S=\frac{x_A+x_B}{2} \qquad y_S=\frac{y_A+y_B}{2}$$

- Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to można opisać ją równaniem kierunkowym:



$$y=ax+b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a=\operatorname{tg}\alpha$$

Prosta o równaniu $y=ax+b$ przecina oś Oy w punkcie $(0,b)$.

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P=(x_0,y_0)$:

$$y=a(x-x_0)+y_0$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A=(x_A,y_A)$ oraz $B=(x_B,y_B)$:

$$y-y_A=a(x-x_A)$$

gdzie

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \qquad \text{gdy} \quad x_B\neq x_A$$

- Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y=a_1x+b_1$ oraz $y=a_2x+b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1=a_2$$

- Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 = -1}$$

- Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

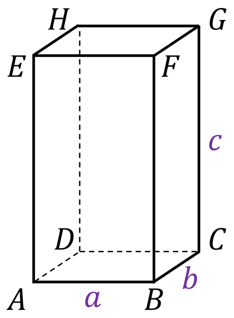
10. STEREOMETRIA

Przyjmujemy oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
V – objętość

- Prostopadłościan

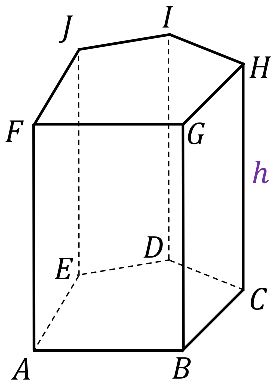
$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$
$$V = abc$$



gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu

- Graniastosłup prosty

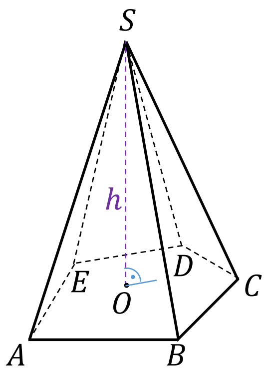
$$P_b = Ob \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$



gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h – wysokością graniastosłupa.

- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$



gdzie h jest wysokością ostrosłupa.

11. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$P(A) \leq P(B)$ dla każdych zdarzeń A oraz B takich, że $A \subset B \subset \Omega$

$P(A') = 1 - P(A)$ gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A, natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

12. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)