Karolina Kołodziej
Urszula Mazur
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

Diagnoza dla *Użycia strategii* oraz *Rozumowania i argumentacji* na przykładzie egzaminu gimnazjalnego z matematyki

Wstęp

W kwietniu 2012 roku został przeprowadzony egzamin gimnazjalny w nowej formule. Proces wdrażania zmian był przygotowywany sukcesywnie i obejmował następujące działania:

- wprowadzenie nowej podstawy programowej,
- zmianę sposobu oceniania zadań otwartych,
- opublikowanie *Informatora gimnazjalnego,*
- rozdzielenie każdej części na oddzielne zakresy,
- zastosowanie nowych typów zadań egzaminacyjnych,
- opublikowanie przykładowych zestawów zadań,
- badanie diagnostyczne,
- egzamin gimnazjalny 2012,
- zmianę w sposobie komunikowania wyników (wynik procentowy i centylowy).

Jedną z istotnych zmian, które związane są z egzaminem gimnazjalnym od 2012 roku, jest podstawa jego przeprowadzenia. Dokumentem regulującym tę kwestię jest rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 roku w sprawie podstawy programowej, wprowadzone we wrześniu 2009 roku w klasach pierwszych gimnazjum. Podstawa programowa określa zarówno zakres treści nauczania, jak i podstawowe cele kształcenia dla każdego przedmiotu, zwane wymaganiami ogólnymi. Treści nauczania nie powtarzają się w zakresie danego przedmiotu, natomiast cele ogólne są spójne dla kolejnych szczebli kształcenia. W przypadku matematyki realizacja celów szczegółowych służy kształceniu wspólnych dla III i IV etapu edukacyjnego następujących wymagań ogólnych:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Wiedza, którą zdobywają uczniowie w kolejnych latach edukacji szkolnej składa się z wiadomości i umiejętności. W przypadku matematyki ważniejszą rolę przypisuje się umiejętnościom, dlatego zadania egzaminacyjne nastawione są na sprawdzenie poziomu opanowania właśnie ich, zwłaszcza tych, które są przydatne w rozumieniu i przyswojeniu treści realizowanych na kolejnych etapach. Zatem, czym jest umiejętność w matematyce? Profesor George Polya, twórca nowoczesnej heurystyki, w książce *Odkrycie matematyczne* podaje następującą odpowiedź:

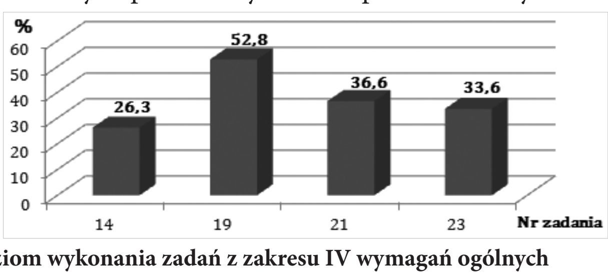
Zdolnością do rozwiązywania zadań, i to nie tyle zadań typowych, co tych, które wymagają niezależności sądu, umiejętności osądu, oryginalności, zdolności twórczych.

Gimnazjalne zadania egzaminacyjne z matematyki sprawdzają wiadomości i umiejętno**ści, których** uczeń powinien nabyć w trakcie realizowania trzeciego etapu kształcenia i etapów niższych. Każde zadanie sprawdza jedno lub więcej wymaga**ń** szczegółowych oraz odnosi się do co najmniej jednego wymagania ogólnego. Forma zadania, sposób sformułowania polecenia decyduj**ą** o tym, jakie wymagania ogólne są do niego przypisane. Wykaz umiejętności sprawdzanych danym arkuszem egzaminacyjnym przygotowany przez Centralną Komisję Edukacyjną określa zarówno zakres treści, jak i wymagania ogólne, którym przyporządkowano kolejne zadania.

Jak uczniowie trzecich klas gimnazjum radzili sobie z zadaniami egzaminacyjnymi odnoszącymi się do wymagań ogólnych *Użycie i tworzenie strategii* oraz *Rozumowanie i argumentacja*?

W niniejszej pracy dokonano analizy tych zadań egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki przeprowadzonego w kwietniu 2012 roku, które sprawdzały umiejętności zaklasyfikowane do najwyższych stopni matematycznego wtajemniczenia, czyli *Użycie i tworzenie strategii* oraz *Rozumowanie i argumentacja.* Podjęto próbę rozpoznania stopnia przygotowania gimnazjalistów do podejmowania rozwiązania zadań wymagających nieschematycznego działania oraz umiejętności dobierania własnych strategii do nietypowych warunków. Pokazano to poprzez analizę wybieralności dystraktorów w zadaniach zamkniętych oraz wskazywanie trudności towarzyszących rozwiązywaniu zadań otwartych. W omawianym arkuszu jest siedem zadań badających kompetencje uczniów w zakresie przytoczonych wymagań ogólnych, z których trzy dotycz**ą** tylko wymagania IV, dwa tylko wymagania V, dwa kolejne odnoszą się do trzech wymagań ogólnych, w tym jedno (zadanie 21.), którego rozwiązanie wymaga umiejętności z obszaru IV i V. W analizowanej grupie są wszystkie zadania otwarte (trzy), a spośród zamkniętych jedno na dobieranie i trzy wielokrotnego wyboru. Łącznie za omawiane zadania można było uzyskać 14 punktów, co stanowi prawie 47% punktów możliwych do uzyskania za arkusz. **Źródłem danych statystycznych** wykorzystanych w niniejszym opracowaniu jest *Sprawozdanie z egzaminu gimnazjalnego w 2012 roku* przygotowane przez Wydział Badań i Analiz Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Krakowie.

Wymaganie ogólne *Użycie i tworzenie strategii* było reprezentowane przez cztery zadania, których poziom wykonania przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1. Poziom wykonania zadań z zakresu IV wymagań ogólnych

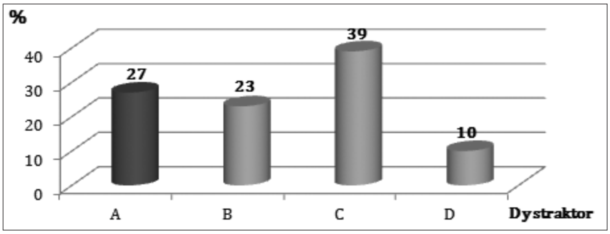
Zadanie 14.

Piechur porusza się z prędkością 4. Każdy jego krok ma długość 0,8 m.

Ile kroków wykona piechur w czasie 12 minut? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 1000 kroków
B. 800 kroków
C. 640 kroków
D. 100 kroków

Zadanie okazało się dla uczniów trudne. Tylko 27% z nich wybrało właściwą odpowiedź. Atrakcyjność poszczególnych dystraktorów ilustruje rysunek 2.



Rysunek 2. Atrakcyjność dystraktorów w zadaniu nr 14

Wybieralność dystraktora B była nieznacznie niższa od odpowiedzi poprawnej (A), co świadczy o tym, że uczniowie kończyli rozwiązanie na obliczeniu drogi w metrach, zapominając o przeliczeniu dystansu na kroki.

Bardzo wysoka atrakcyjność dystraktora C wynika z często popełnianego błędu przy przeliczaniu drogi w metrach na kroki. Uczniowie zamiast dzielenia, wykonywali mnożenie.

Co dziesiąty uczeń wybrał odpowiedź D, co oznacza, że prawdopodobnie popełnił błąd przy zamianie kilometrów na metry lub ma problem z dzieleniem przez liczbę dziesiętną.

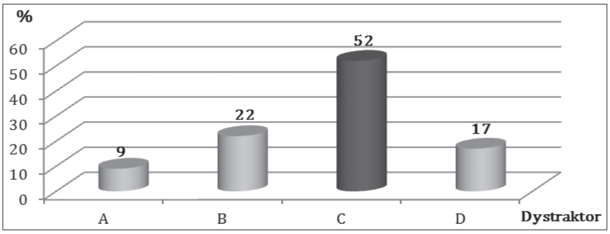
Zadanie 19.

Basen ma kształt prostopadłościanu, którego podstawa (dno basenu) ma wymiary 15 m10 m. Do basenu wlano 240 m^3 wody, która wypełniła go do głębokości.

Jaka jest głębokość tego basenu? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 1,28 m **B.** 1,5 m **C.** 2 m **D.** 3 m

To zadanie było dla uczniów umiarkowanie trudne, ponad połowa wybrała poprawną odpowiedź (C). Wybór pozostałych odpowiedzi może świadczyć zarówno o braku umiejętności obliczania ułamka liczby, jak i błędnej interpretacji treści zadania. Wybieralność poszczególnych dystraktorów ilustruje rysunek 3.



Rysunek 3. Atrakcyjność dystraktorów w zadaniu nr 19

Zadanie 23.

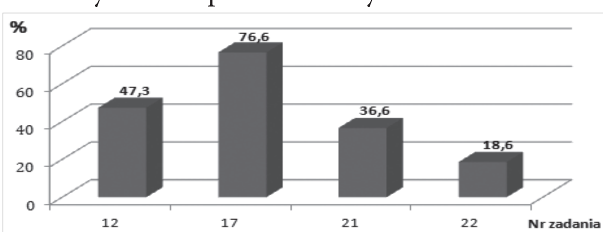
Obwód trapezu równoramiennego jest równy 72 cm, ramię ma długość 20 cm, a różnica długości podstaw wynosi 24 cm. Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie zadania wymagało od ucznia dokonania analizy sytuacji problemowej, doboru odpowiednich procedur i danych oraz przeprowadzenia ciągu obliczeń, w tym zastosowania twierdzenia Pitagorasa, co stanowiło istotny postęp.

Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne, poziom jego wykonania wynosi 33,6% (rysunek 1.). Ponad 45% uczniów nie zdobyło żadnego punktu za jego rozwiązanie, wśród nich była znacząca grupa tych, którzy nie podjęli próby rozwiązania.

Ponad 22% uczniów dokonało niewielkiego postępu, którym było obliczenie którejkolwiek z wielkości: długości jednej z podstaw, sumy długości podstaw lub połowy długości ich różnicy. Co czwarty uczeń pokonał zasadniczą trudność zadania, która polegała na zaprezentowaniu poprawnego sposobu obliczenia pola trapezu, a tylko co piąty rozwiązał zadanie bezbłędnie, uzyskując 4 punkty.

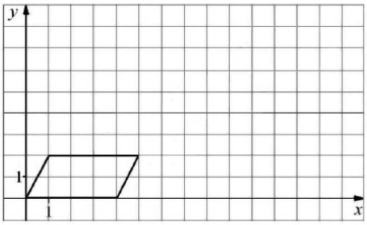
Umiejętność *Rozumowania i argumentacji* była badana za pomocą czterech zadań. Poziom ich wykonania przedstawia rysunek 4.



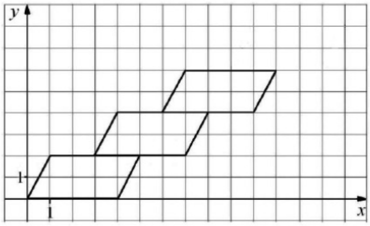
Rysunek 4. Poziom wykonania zadań z zakresu V wymagań ogólnych

Informacje do zadań 11.-13.

Małgosia narysowała równoległobok położony w układzie współrzędnych tak jak na pierwszym rysunku. Kolejne przystające do niego równoległoboki rysowała w taki sposób, że dolny lewy wierzchołek rysowanego równoległoboku był środkiem górnego boku poprzedniego równoległoboku (rysunek 2.).



Rysunek 1.



Rysunek 2.

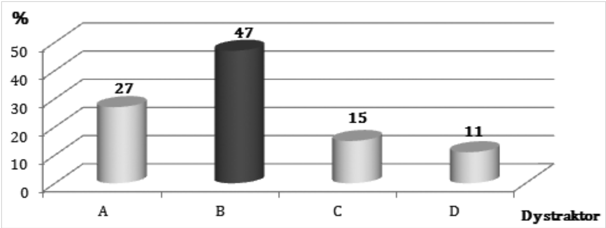
Zadanie 12.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Agnieszka narysowała w taki sam sposób *n* równoległoboków. Współrzędna *y* prawego górnego wierzchołka ostatniego równoległoboku jest równa

A. $n + 2$ **B.** $2n$ **C.** $2n + 2$ **D.** $4n$

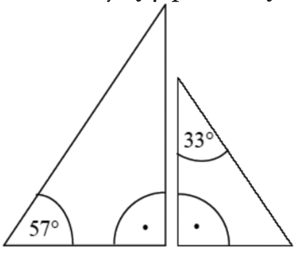
Zadanie należało do trudnych, ponad połowa uczniów dokonała niewłaściwego wyboru odpowiedzi. Około 27% uczni**ów,** wskazując odpowiedź A, dokonało porównania współrzędnej *y* wierzchołka ostatniego równoległoboku z odpowiednią współrzędn**ą równoległoboku poprzedniego,** a nie pierwszego. Wybór dystraktora **C może świadczyć o tym, że ok. 15% uczniów** uwzględniło jednocześnie dwie informacje: druga współrzędna wskazanego wierzchołka jest liczbą parzystą, o 2 większą od drugiej współrzędnej odpowiedniego wierzchołka wcześniejszego czworokąta. Co dziesiąty uczeń sformułował wniosek, porównując współrzędne wierzchołka pierwszej i czwartej figury (rozwiązanie zadania 11.). Wybieralność poszczególnych dystraktorów ilustruje rysunek 5.



Rysunek 5. Wybieralność dystraktorów w zadaniu nr 12

Zadanie 17.

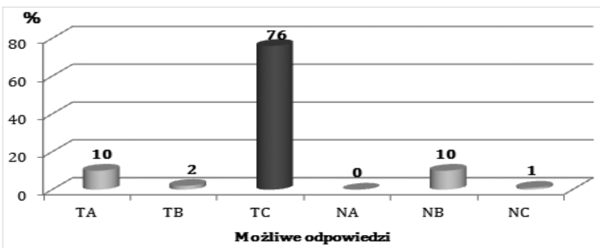
Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty prostokątne.



Czy te trójkąty są trójkątami podobnymi? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A-C.

<table>
<tr><td>T</td><td rowspan="3">ponieważ</td><td>A.</td><td>każde dwa trójkąty prostokątne są podobne.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">N</td><td>B.</td><td>miary kątów ostrych jednego trójkąta są różne od miar kątów ostrych drugiego trójkąta.</td></tr>
<tr><td>C.</td><td>miary kątów ostrych jednego trójkąta są takie same jak miary kątów ostrych drugiego trójkąta.</td></tr>
</table>

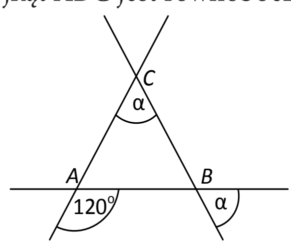
Mimo formy, która nie występowała w dotychczasowych arkuszach egzaminacyjnych, zadanie okazało się dla uczniów łatwe (wykonalność 76%). Jednakowo atrakcyjnymi odpowiedziami były TA i NB. Wyb**ór pierwszej** z nich świadczy o braku znajomości cech podobieństwa trójkątów prostokątnych, a drugiej o nieumiejętności ich stosowania. Wybieralność poszczególnych odpowiedzi przedstawia rysunek 6.



Rysunek 6. Wybieralność odpowiedzi w zadaniu nr 17

Zadanie 22.

Trzy proste przecinające się w sposób przedstawiony na rysunku tworzą trójkąt ABC. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



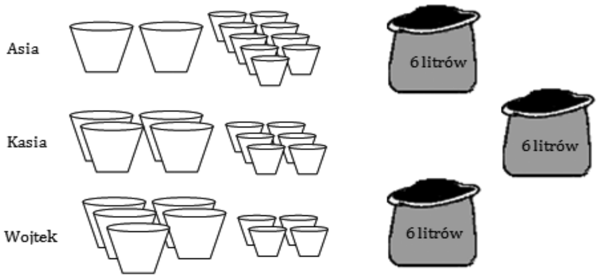
Zadanie 22. było najtrudniejsze w arkuszu z zakresu matematyki w 2012 roku. Uzasadnianie i dowodzenie nie jest mocną stroną uczniów kończących gimnazjum. Zadaniom tego typu poświęca się zbyt mało uwagi w trakcie nauki. Zarówno w obowiązującej do 2009 roku podstawie programowej, jak i w standardach wymagań egzaminacyjnych ta umiejętność nie była zapisana. W związku z tym zadania typu „uzasadnij" nie pojawiały się na wcześniejszych egzaminach.

Prawie 77% uczniów otrzymało za to zadanie 0 punktów, najczęściej z powodu niepodjęcia próby rozwiązania lub utożsamienia tezy z założeniem. Około 9,5% uczniów zatrzymało się na pokonaniu zasadniczej trudności, zaznaczając, że kąt wewnętrzny trójkąta przy wierzchołku A ma miarę 60° (jako kąt przyległy do kąta 120°), a kąt przy wierzchołku B jest przystający do α (z własności kątów wierzchołkowych). Niespełna 14% gimnazjalistów rozwiązało zadanie poprawnie, otrzymując 2 punkty.

Zadanie 21. badało umiejętności przypisane do trzech wymagań ogólnych - I, IV i V.

Zadanie 21.

Asia, Kasia i Wojtek przesadzają kwiatki do doniczek. Każde z nich ma 6-litrowy worek ziemi ogrodniczej i doniczki dwóch wielkości. Asia wykorzystała całą ziemię, którą dysponowała, i napełniła 2 duże doniczki i 9 małych. Kasia całą swoją ziemię zużyła do wypełnienia 4 dużych i 6 małych doniczek. Wojtek chciałby wypełnić ziemią 5 dużych i 4 małe doniczki. Czy wystarczy mu ziemi, którą ma w worku? Uzasadnij odpowiedź.



To kolejne trudne dla gimnazjalistów zadanie, poziom wykonania wyniósł 36,6%. Co drugi uczeń za jego rozwiązanie otrzymał 0 punktów. 39% piszących egzamin pokonało zasadnicze trudności, natomiast tylko 26% rozwiązało zadanie poprawnie, uzyskując 4 punkty. Trudności uczniów w rozwiązaniu tego zadania polegały głównie na błędnej interpretacji warunków zadania, jak również na poprawnym, niebudzącym wątpliwości zapisie przebiegu rozumowania. Mimo tych problemów, było to zadanie dające uczniom możliwości różnych sposobów rozwiązania (algebraiczny, arytmetyczny, graficzny, opisowy oraz metodą prób i poprawek), co zostało uwzględnione w schemacie oceniania.

Porównanie poziomu wykonania wybranych zadań z egzaminu gimnazjalnego i badania diagnostycznego

Czy wyniki egzaminu zaskoczyły odbiorców / jego obserwatorów, czy też można je było przewidzieć?

Autorki opracowania nie są zaskoczone faktem, że poziom spełnienia wymagań ogólnych o najwyższych numerach wynosi niespełna 36% dla IV i niewiele ponad 38% dla V, natomiast dla wymagań I-III te wskaźniki są wyższe niż 50%. W 10-letniej historii egzaminu gimnazjalnego zadania wymagające umiejętności rozwiązywania problemów oraz stosowania w praktyce praw i zależności przyczynowo-skutkowych były też trudniejsze niż te, które wymagały operowania informacją lub znajomości terminów i pojęć. Ze względu na zmienioną formę i wydzielony zakres egzaminu, porównywanie wyników tych egzaminów nie jest jednak uprawnione.

Jedynym materiałem, do którego można się odwołać jest raport Zespołu Dydaktyk Szczegółowych Instytutu Badań Edukacyjnych *Diagnoza kompetencji gimnazjalistów matematyka* z badania diagnostycznego przeprowadzonego w grudniu 2011 roku. Ze względu na niewielką równoczesną zbieżność zarówno sprawdzanych treści, jak i wymagań ogólnych w obydwu testach oraz wydzieloną ilość znaków w referacie ograniczono się do czterech przykładów.

Zadanie 21. w badaniu diagnostycznym oraz zadanie 23. zastosowane podczas egzaminu gimnazjalnego wymagały między innymi zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Poziom wykonania tych zadań otwartych jest zbliżony i wynosi odpowiednio 31% i 33%. Taki sam odsetek uczniów (ok. 45%) nie uzyskał za to zadanie żadnego punktu, natomiast maksymalną liczbę punktów w badaniu diagnostycznym uzyskało 13% badanych, a podczas egzaminu 20% uczniów trzecich klas gimnazjum.

Kolejną parę tworzą zadania badające umiejętność uzasadniania. Za każde z nich można było uzyskać maksymalnie 2 punkty. Zarówno podczas diagnozy, jak i egzaminu gimnazjalnego były to zadania bardzo trudne dla gimnazjalistów. Poziom ich wykonania wyniósł odpowiednio 9% i 18%. W grudniu 2011 roku prawie 87% badanych nie uzyskało za nie żadnego punktu, a podczas egzaminu wskaźnik ten wynosi niespełna 77%. Przyczyn tak niskich wyników należy upatrywać zarówno w niewystarczającej liczbie rozwiązywanych na poziomie gimnazjum zadań, w których wymagane jest przeprowadzenie uzasadnienia, na co wskazuje mylenie założenia z tezą, jak i nieporadność uczniów w zapisywaniu toku rozumowania.

Trzecia para zadań dotyczy różnych wymagań ogólnych, ale odnosi się do tych samych umiejętności szczegółowych, to jest obliczania objętości brył obrotowych. Zastosowane podczas badania diagnostycznego zadanie 20. (wymaganie V) miało formę prawda - fałsz i poziom wykonania 48%, natomiast dla zadania WW numer 20 (wymaganie II) z arkusza egzaminacyjnego ten wskaźnik jest równy 55%.

Podobnie jest z zadaniem 19. z badania diagnostycznego oraz zadaniem 19. z egzaminu. Obydwa dotyczą graniastosłupów i są zadaniami zamkniętymi WW, przy czym pierwsze z nich (obszar II i III wymagań ogólnych) zostało rozwiązane przez 20% badanych, a w drugim (obszar IV) poprawną odpowiedź wybrało 52% piszących egzamin na terenie OKE w Krakowie.

Rokowania dla strategii, rozumowania i argumentacji

Umiejętność rozwiązywania zadań, szczególnie tych, które odnoszą się do IV i V wymagania ogólnego to nie tylko zasób pewnej wiedzy matematycznej oraz znajomość wzorów, zasad, reguł i przekształceń. To przede wszystkim posiadanie pewnych nawyków myślowych, postaw zorientowanych na aktywne i samodzielne dokonywanie porównań, analizę danych, kojarzenie różnych faktów, formułowanie hipotez, weryfikowanie ich oraz uzasadnianie.

Oczekiwane postawy można kształtować poprzez dobór odpowiednich przykładów rozwiązywanych zadań oraz metod nauczania, które pozwolą na wyposażenie uczniów w niezbędną wiedzę, dobrze utrwaloną i gotową do zastosowania w sytuacjach nowych, nietypowych.

Warto pamiętać o doborze zadań realizujących trzy aspekty kształcące: podsumowujący, retrospektywny i perspektywiczny.

Istotne znaczenie w osiąganiu celów ogólnych mają zarówno zadania-ćwiczenia utrwalające nowo poznaną wiedzę, jak i zadania wiążące nowe informacje z wiedzą już posiadaną oraz pokazywanie przydatności aktualnie opracowywanych treści do rozumienia i przyswojenia nowych informacji.

Uświadomienie sobie tych faktów przez nauczycieli matematyki oraz systematyczne stosowanie w pracy na lekcji ćwiczeń o trzech aspektach kształcących może wpłynąć pozytywnie na postawę uczniów wobec poszukiwania różnych strategii rozwiązywania problemów i zadań z poleceniem *uzasadnij.* A to już duży krok w kierunku podniesienia jakości rozwiązań zadań wymagających użycia strategii, rozumowania i argumentacji.

Bibliografia:

5. Arkusz egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2012.
6. *Wykaz badanych umiejętności z zakresu matematyki*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2012.
7. *Schemat oceniania zadań z zakresu matematyki*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2012.
8. Arkusze diagnostyczne z matematyki w klasie trzeciej gimnazjum, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2011.
9. *Sprawozdanie z egzaminu gimnazjalnego w 2012 roku,* Wydział Badań i Analiz Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Krakowie, OKE Kraków 2012.
10. *Diagnoza kompetencji gimnazjalistów matematyka. Raport z badania,* Instytut Badań Edukacyjnych, Zespół Dydaktyk Szczegółowych, Warszawa 2012.
11. Szymański S., *Kształcenie operatywności wiedzy matematycznej,* Poznań 1977.
12. Polya G., *Odkrycie matematyczne,* Warszawa 1975.