

**Październikowe konferencje  
z dyrektorami szkół ponadgimnazjalnych**

**Co z tą matematyką**



Piotr Ludwikowski

Witam! Nazywam się Piotr Ludwikowski i kieruję Pracownią Egzaminów Maturalnych w Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Krakowie. Jestem z wykształcenia i z zamiłowania matematykiem, stąd oprócz zawodowego obowiązku moje zainteresowanie tematem prezentacji.

Wokół egzaminu maturalnego z matematyki, szczególnie w ostatnim półroczu, narosło wiele nieporozumień, wątpliwości, lęków i półprawd. Postaram się rozwiązać te wątpliwości, przedstawić interpretację aktualnych uwarunkowań prawnych, a przede wszystkim pokazać, że egzaminu z matematyki nie trzeba się bać.

Jak każdy matematyk budujący pewną teorię czy strukturę logiczną rozpocznę od przedstawienia faktów. Cztery dokumenty regulują obecny stan prawny w kwestiach związanych z egzaminem maturalnym z matematyki. Są to:

## Fakty

- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 30 kwietnia 2007 w sprawie warunków i sposobów oceniania, klasyfikowania i przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów...
- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 23 sierpnia 2007 w sprawie podstawy programowej...
- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 sierpnia 2007 w sprawie standardów wymagań...
- Komunikat Dyrektora Komisji Centralnej z dnia 12 września 2007 o wpływie zmiany podstawy programowej na przebieg egzaminów zewnętrznych w 2008 roku

- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 30 kwietnia 2007 w sprawie warunków i sposobów oceniania, klasyfikowania i przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów...

które wprowadza egzamin maturalny z matematyki jako jeden z egzaminów obowiązkowych począwszy od 2010 roku.

- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 23 sierpnia 2007 w sprawie podstawy programowej...

które dostosowuje podstawę programową nauczania matematyki do wymogów egzaminu zdawanego przez całą populację maturzystów.

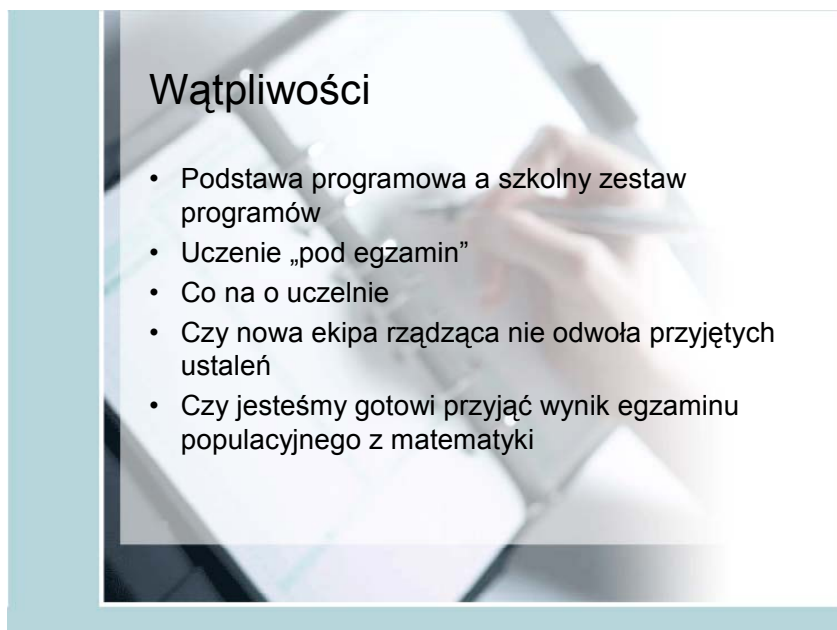
- Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 sierpnia 2007 w sprawie standardów wymagań...

które szczegółowo opisuje jakie umiejętności badane będą na egzaminie maturalnym z matematyki.

- Komunikat Dyrektora Komicji Centralnej z dnia 12 września 2007 o wpływie zmiany podstawy programowej na przebieg egzaminów zewnętrznych w 2008 roku,

który szczegółowo opisuje zakres umiejętności i treści programowych badanych na egzaminie maturalnym w roku 2008 w kontekście zmian wprowadzonych cytowanymi wcześniej rozporządzeniami.

Do szczegółowej interpretacji zapisów w tych dokumentach powrócę w dalszej części prezentacji, zatrzymując się teraz na wymienieniu wątpliwości, które po lekturze tych dokumentów się pojawiają.



## Wątpliwości

- Podstawa programowa a szkolny zestaw programów
- Uczenie „pod egzamin”
- Co na o uczelnie
- Czy nowa ekipa rządząca nie odwoła przyjętych ustaleń
- Czy jesteśmy gotowi przyjąć wynik egzaminu populacyjnego z matematyki

Wątpliwości te artykułują dyrektorzy szkół, doradcy metodyczni i nauczyciele w trakcie rozmów telefonicznych, korespondencji mailowej czy bezpośrednich spotkań.

Najczęściej zadawane pytania dotyczą:

- Związku podstawy programowej ze szkolnym zestawem programów. Szkolny zestaw programów nauczania musiał zostać zatwierdzony przez radę pedagogiczną przed rozpoczęciem roku szkolnego, a nowe uwarunkowania prawne ukazały się pod koniec sierpnia.

- Pojawia się naturalna tendencja uczenie „pod egzamin”. Po co uczyć treści, które nie będą sprawdzane na egzaminie?
- Jaki stosunek do zmian programowych mają pracownicy uczelni wyższych. Czy uwzględniają je w swoich programach studiów?
- I pytanie, które pojawia się bardzo często? Czy nowa ekipa rządząca nie odwoła przyjętych ustaleń. Doświadczenie z ubiegłych lat podpowiada, że niestety nie można być pewnym stabilności systemu edukacyjnego, który często jest elementem gry politycznej. Pozostałe wątpliwości postaram się rozwiać w dalszej części prezentacji, nad tym aspektem zatrzymam się jednak teraz dłużej. Otóż po raz pierwszy od dawna, dwa bardzo duże systemy – egzaminacyjny i szkolnictwa wyższego wspólnie, podkreślają wspólnie, przygotowały propozycję zmian. Rektorzy wyższych uczelni w pełni akceptują i popierają te zmiany. W trakcie Salonów Maturzystów w wielu miastach rektorzy najbardziej opiniotwórczych uczelni swoim autorytetem potwierdzili konieczność ich wprowadzenia. Taki lobbing na rzecz utrwalenia nowych uwarunkowań egzaminacyjnych wydaje się być gwarantem ich stabilności.
- I wreszcie podstawowe pytanie. Czy jesteśmy gotowi przyjąć wynik egzaminu z matematyki zdawanego przez całą populację. Musimy się przecież liczyć z możliwością, że próg zdawalności okaże się za wysoki do przekroczenia dla wielu maturzystów.

Zawsze, gdy wprowadzane są zmiany, w każdym istniejącym już systemie, pojawiają się pytania czy te zmiany są konieczne. Jak mówi profesor Marciniak – szef Państwowej Komisji Akredytacyjnej i współautor nowej podstawy programowej i nowego układu standardów, cytując rady z XVIII - wiecznego podręcznika pszczelarza – „...i niepotrzebnie nie gmyrać przy ulu”. Czy jednak proponowane zmiany są niepotrzebne? Prześledźmy kilka faktów.

## Spada zainteresowanie matematyką jako przedmiotem egzaminacyjnym i kierunkiem studiów

- Mniej niż 20% wybiera matematykę jako przedmiot egzaminacyjny.
- Mimo pięciokrotnego wzrostu liczby studentów w ciągu ostatnich piętnastu lat, do niepokojąco niskich rozmiarów spadła liczba chętnych do studiowania tych kierunków studiów, które wymagają nauki matematyki.

Okazuje się, że

- Mimo pięciokrotnego wzrostu liczby studentów w ciągu ostatnich piętnastu lat, do niepokojąco niskich rozmiarów spadła liczba chętnych do studiowania tych kierunków studiów, które wymagają nauki matematyki.
- Mniej niż 20% wybiera matematykę jako przedmiot egzaminacyjny.

Przecież tak dużo młodych ludzi po studiach wyjeżdża do Irlandii, Anglii, Holandii czy Szwecji i stoją przy zmywaku zarabiając kilkakrotnie mniej niż mogliby zarabiać jako inżynierowie, matematycy czy fizycy. Popyt na takich specjalistów jest duży. Są tylko dwie bariery – posiadanie dyplomu liczącej się uczelni i znajomość języka obcego. Z tym drugim absolwenci naszych szkół ponadgimnazjalnych mają coraz mniejsze kłopoty, średnio znajomość języków obcych znacznie wzrosła. Pozostaje tylko sensownie wybrać kierunek studiowania.

## Badania PISA

Polscy uczniowie poddani międzynarodowemu testowi PISA w zakresie matematyki wykazali się zręcznością w stosowaniu wyćwiczonych, rutynowych procedur i byli bezradni tam, gdzie należało wykazać się twórczym, krytycznym myśleniem.

Co około dwa lata, również w Polsce, przeprowadza się badania w ramach programu PISA. Program ten powstał w 1997 roku i jego twórcy jako główny cel postawili badanie umiejętności i wiedzy ważnej z perspektywy wyzwań, przed jakimi 15-latkowie staną w swym dorosłym życiu. Punktem wyjścia jest pojęcie **alfabetyzmu** odnoszące się do „zdolności stosowania wiedzy i umiejętności, analizowania, argumentowania i efektywnego komunikowania w procesie stawiania, rozwiązywania i interpretowania problemów w różnych sytuacjach”. Okazuje się, że w zakresie matematyki, polscy piętnastolatkowie wykazują się zręcznością w stosowaniu wyćwiczonych, rutynowych procedur ale stają się bezradni tam, gdzie należy wykazać się twórczym, krytycznym myśleniem.

## Strategia Lizbońska

Strategia Lizbońska, projektująca pościg Europy za najszybciej rozwijającymi się regionami świata, podkreśla ogromne znaczenie nauk ścisłych (w tym matematyki) dla powodzenia tego projektu. Dokumenty Parlamentu Europejskiego i Rady Europy, wskazują kluczowy charakter umiejętności matematycznych.

Problem zmniejszającego się zainteresowania matematyką i innymi kierunkami ścisłymi i studiami technicznymi nie jest tylko polskim problemem. Stany Zjednoczone i kraje Dalekiego Wschodu szczególnie Japonia, Chiny, Korea i inne rozwijają się bardzo dynamicznie. Znacznie szybciej niż kraje europejskie. **Strategia Lizbońska** to plan rozwoju przyjęty dla Unii Europejskiej przez Radę Europejską na posiedzeniu w Lizbonie w roku 2000. Celem tego planu, przyjętego na okres 10 lat, jest uczynienie Europy najbardziej dynamicznym i konkurencyjnym regionem gospodarczym na świecie, rozwijającym się szybciej niż Stany Zjednoczone i kraje Dalekiego Wschodu. Strategia opiera się przede wszystkim na założeniu, że gospodarka krajów europejskich wykorzysta do maksimum innowacyjność opartą na szeroko zakrojonych badaniach naukowych, zwłaszcza w nowoczesnych dziedzinach wiedzy, stawiając na rozwój i powszechną znajomość matematyki, informatyki i szeroko rozumianej techniki.

## Prognostyczna rola umiejętności matematycznych

Wykładowcy wyższych uczelni alarmują, że studenci pierwszego roku mają kłopoty ze rozumieniem podstawowych pojęć matematycznych. Jednocześnie przyznają, że wynik z matematyki na maturze stanowi nieźłą prognozę powodzenia na bardzo wielu kierunkach studiów.

Położenie nacisku na matematykę nie jest przypadkowe. Badania prowadzone na kilku uczelniach dowiodły, że wyniki uzyskiwane przez maturzystów zdających egzamin z matematyki są bardzo dobrym prognostykiem osiągnięć przyszłego studenta, niekoniecznie kierunków ścisłych. Okazuje się, że wysoki wynik z matematyki pozwala w sposób uprawniony przewidywać, że na przykład student prawa legitymujący się takim wynikiem będzie osiągał dobre i bardzo dobre rezultaty na swoim kierunku studiów pozornie niezwiązanym z matematyką.

Pozornie bo matematyka jest nauką interdyscyplinarną. Przejawia się w wielu aspektach codziennego życia, wielu współczesnych dziedzin wiedzy nie można „uprawiać” bez znajomości matematyki. Oto kilka przykładów:



**Matematyka jest interdyscyplinarna**

- technika (np. kasy biletowe, komputery, telefony komórkowe)
- medycyna (tomografia komputerowa)
- ekonomia
- socjologia
- antropologia
- bankowość (szyfrowanie)
- meteorologia
- statystyka

Oprogramowanie wielu urządzeń technicznych, od kas biletowych na dworcach do aparatów fotograficznych, komputerów i telefonów komórkowych wymaga matematyki jako narzędzia potrzebnego do sprawnego funkcjonowania. Dziedziny wiedzy pozornie odległe od matematyki nie potrafią się bez niej obejść. Stosowanie na przykład tomografii komputerowej - jednej z metod obrazowania narządów i tkanek o bardzo dużej dokładności i szczegółowości, wymaga matematycznej wiedzy o przekrojach, rzutach i przenikaniu się płaszczyzn. Współczesna meteorologia stosuje zawansowane metody rodem z rachunku prawdopodobieństwa, a w bankowości oprócz standardowego obliczania odsetek związanych z kredytami, lokatami i umiejętnością oceny ryzyka inwestowania w akcje, niezbędna okazuje się wiedza o liczbach pierwszych – podstawa szyfrowania danych. A poufność informacji to podstawa funkcjonowania prężnie rozwijającej się bankowości internetowej, systemu kart płatniczych, kredytowych i innych. O ekonomii i statystyce, w których zaawansowana matematyka jest tradycyjnym narzędziem badań wspominać, nawet nie trzeba.

Dlaczego więc matematyka budzi strach i niechęć? Dlaczego uważana jest za nudną i nadmiernie abstrakcyjną, wyzuta z humanistycznych, bliskich współczesnemu człowiekowi odniesień? Przecież od Starożytności aż do późnego Odrodzenia była obowiązkowym przedmiotem na każdym kierunku studiów. Zarówno Jan Kochanowski jak i Mikołaj Kopernik studiując w Akademii Krakowskiej musieli egzaminy z matematyki zdawać. Niestety rozwój nauk i idąca za nim wąska specjalizacja spowodowała, że matematyka została na wiele lat pozostawiona sama sobie.

## Dlaczego hasło matematyka budzi strach?

- według prof. M.Kordosa to spuścizna po czasach napoleońskich,
- matematyka jest bezlitosnym narzędziem oceny wartości,
- często jest uczona w sposób odpychający zawilnością i żmudnością,
- utarło się usprawiedliwianie swojego lenistwa intelektualnego brakiem uzdolnień matematycznych,
- stereotyp matematyka.

Profesor Marek Kordos uważa, że niechęć do matematyki ma swoje korzenie w czasach napoleońskich. Sukcesy Napoleona miały swoje uzasadnienie również w bardzo dobrym matematycznym przygotowaniu kadry oficerskiej i artylerzystów. Zastosowanie metod matematycznych w planowaniu i budowaniu strategii, w obliczeniach balistycznych i w modelowaniu sytuacji pól bitew okazało się groźnym narzędziem, równie groźnym jak odwaga, wyszkolenie i determinacja żołnierzy. Pogromcy Napoleona postanowili i swoje armie wyposażać w to narzędzie. Rozpoczęto powszechną naukę matematyki często nie dysponując ku temu właściwymi środkami. Zaczęto uczyć matematyki najłatwiejszej do wyegzekwowania to znaczy rachunków i algorytmów postępowania w typowych sytuacjach. Często jeszcze i dzisiaj matematyka jest uczona w sposób odpychający swoją pozorną zawilnością i żmudnością.

Matematyka nie zawsze jest lubiana, bo jest bezlitosnym narzędziem oceny wartości, odróżnienia prawdy od fałszu. Nie ma znaczenia wiek, tytuł naukowy, uroda, pozycja społeczna ani żaden inny czynnik za wyjątkiem żelaznej logiki. Wystarczy podać jeden kontrprzykład, żeby twierdzenie obalić. Kolejnym powodem, dla którego matematyka jest odrzucana, to usprawiedliwianie swojego lenistwa intelektualnego brakiem uzdolnień matematycznych. Często spotykamy się z komunikatem: jestem urodzonym humanistą matematyka jest nie dla mnie. A przecież każdy nauczyciel języka polskiego, historii, czy wos - u wie, że najlepiej uczy mu się w klasach o poszerzonym programie nauczania matematyki czy informatyki, a w klasach humanistycznych uczenie nawet tych przedmiotów jest często orką na ugorze. Do wymienionych wcześniej powodów dochodzi jeszcze stereotyp matematyka, ugruntowany przez międzywojenną literaturę np. „Szatana z siódmej klasy” Makuszyńskiego. Matematyk według tego obrazu to zazwyczaj starszy człowiek, żyjący w nierzeczywistym świecie, niewiedzący jaka jest pora dnia i roku, nie zwracający uwagi na to, że ma jedna skarpetkę innego koloru niż drugą, z opadającymi na czubek nosa okularami mamrotający pod nosem niezrozumiałe formuły. Współczesny matematyk to na ogół człowiek młody (większości poważnych odkryć matematycznych dokonują naukowcy przed czterdziestką), doskonale zarabiający i znakomicie zorganizowany.

## Matematyka nauką humanistyczną

Według ks. prof. Życińskiego matematyka jest nauką humanistyczną. Przede wszystkim dlatego, że inspiruje najważniejsze dla ludzkiej egzystencji pytania, np. o matematyczność przyrody, dając jednocześnie narzędzia do konstruowania prób odpowiedzi.

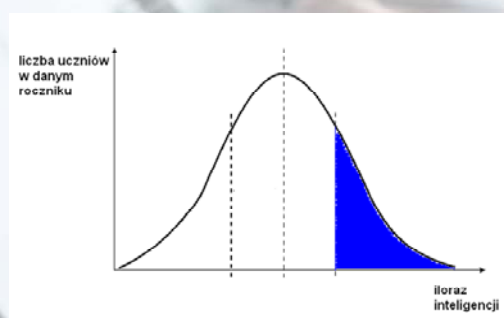
Warto jeszcze powtórzyć za księdzem profesorem Życińskim, że matematyka jest nauką na wskroś humanistyczną. Jest nią, ponieważ inspiruje do stawiania najważniejszych dla człowieka pytań np. o matematyczność przyrody i wyposaża w narzędzia umożliwiające poszukiwania odpowiedzi na takie pytania.

Niezbędna jest zatem zmiana podejścia do matematyki, do jej uczenia, do myślenia o niej jako o przedmiocie egzaminacyjnym.

Zanim jeszcze powiem jaki jest kierunek zmian, przedstawię dwa wykresy ilustrujące populacyjne uwarunkowania egzaminu maturalnego.

## Jaki jest kierunek zmian

Kontekst populacyjny (lata 80-te)

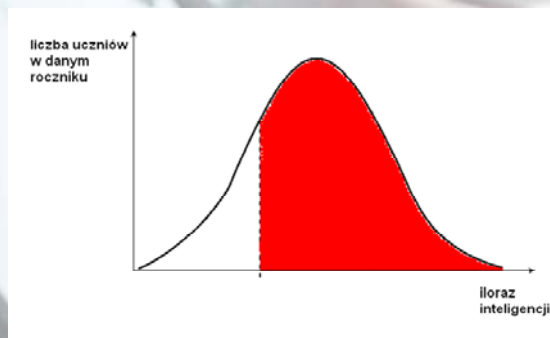


W latach osiemdziesiątych, gdy ja chodziłem do liceum, do szkół kończących się egzaminem maturalnym uczęszczało około 30% danego rocznika. Oczywiście średnio rzecz biorąc była to ta część populacji, która legitymowała się największym potencjałem intelektualnym.



## Jaki jest kierunek zmian

Kontekst populacyjny (rok obecny)



Obecnie w szkołach ponadgimnazjalnych kształcą się około 80% populacji. Nie można się więc dziwić, że średnio, intelektualne możliwości tej populacji są o wiele niższe. Stąd nic dziwnego w tym, że program szkoły do której np. ja chodziłem jest nie do zrealizowania we współczesnej rzeczywistości. Dlatego często słyszymy „Jak ja chodziłem do szkoły to przerabialiśmy to i tamto a teraz się nie da”. Bo rzeczywiście się nie da. Bo szkoły mają inną klientelę. Ani lepszą ani gorszą po prostu inną.

I oto obiecywane wcześniej kierunki zmian:

## Jaki jest kierunek zmian

Ograniczenie treści programowych  
(nowa podstawa)

Pogłębiona merytoryczna realizacja pozostałych  
haseł programowych

Zwiększenie nacisku na rozumowanie,  
ograniczenie roli mechanicznych rachunków

Wprowadzenie matematyki jako przedmiotu  
obowiązkowego

Pierwszy najważniejszy – Ograniczenie treści programowych. To się stało! Rozporządzenie Ministra Edukacji Z 30 kwietnia 2007 roku istotnie odchudziło Podstawę Programową Nauczania Matematyki. Pojawia się pytanie dlaczego zrezygnowano właśnie z tych treści.

W matematyce jest tak, że nie można z programu usunąć dowolnych haseł. Są one bowiem bardzo powiązane i rezygnacja z jednego działu może uniemożliwić rozwiązywanie zadań niezbędnych dla realizacji innego. Ponadto, zasięgnięto opinii pracowników wyższych uczelni. Po konsultacjach postanowiono, że z podstawy programowej usunięty zostanie „gruby” dział „elementy analizy matematycznej” potocznie łączony z pojęciem pochodnej funkcji. Okazuje się bowiem, że umiejętności, uczniów którzy ten dział matematyki zrealizowali, sprowadzają się do mechanicznego stosowania algorytmów obliczania granic i pochodnych, bez zrozumienia istoty tych pojęć. Powiązanie tego działu z innymi działami szkolnej matematyki jest raczej luźne, a pojęcia występujące w tym dziale są dość trudne do dogłębnego zrozumienia. Argument, często przedstawiany na spotkaniach z nauczycielami, że pochodne są potrzebne fizykom jest nietrafny, bo kinematykę i dynamikę – działy tradycyjnie korzystające z rachunku różniczkowego realizuje się w I klasie, a z matematyki problemy te były przedmiotem lekcji z trzecioklasistami więc i tak była to „musztarda po obiedzie”. Zrezygnowano również z części haseł w dziale rachunek prawdopodobieństwa i innych drobniejszych haseł programowych.

Nauczyciele matematyki często zwracali uwagę na presję czasową w realizacji poszczególnych haseł podstawy programowej, więc dzięki ograniczeniu liczby tych haseł zyskują czas, potrzebny na pogłębioną merytoryczną realizację pozostałych treści. Przez pogłębioną merytoryczną realizację rozumiem taką, która położy nacisk na to co w matematyce najważniejsze. Na rozumowanie, analizowanie, budowanie strategii postępowania, poszukiwanie różnych metod rozwiązania zadania czy problemu, argumentowania swoich wypowiedzi. Stopniowo, nieuchronnie, nacisk kładziony na naukę rachunków, na rozwiązywanie standardowych rodzajów równań będzie coraz mniejszy. Zrobią to za nas kalkulatory i komputery. I czy nam się to podoba czy nie, coraz ważniejsze będzie „powiedzieć” maszynie co i jak ma zrobić, a ona wykona za nas czarną obliczeniową robotę. Wydaje się, że już niedaleka jest przyszłość, w której rachunki będą pokazywane jako własność elementów pewnej struktury matematycznej, a operowanie nimi jako pewnego rodzaju ciekawostkę. Taki los spotkał już suwak logarytmiczny - kiedyś narzędzie każdego inżyniera dziś obiekt muzealny. Wszystko polega na przemodelowaniu swojego myślenia. Kiedyś, każda szanująca się pani domu musiała, jeżeli nie sama, to poprzez służącą, mieć posługiwać się tarką do prania, dziś tę rolę przejęły pralki automatyczne i nikt z tego powodu nie jest nieszczęśliwy.

Niestety na świecie tak jest, że metoda „kija i marchewki” jest jedną z najskuteczniejszych od wieków. Dlatego, by marchewka czyli zysk czerpany z posiadania umiejętności matematycznych był możliwy do osiągnięcia potrzebny jest i kij. Jego rolę przybiera rygor zdawania obowiązkowego egzaminu z tego przedmiotu. Bez wątplenia status przedmiotu obowiązkowego spowoduje pewną dyscyplinę w podejściu do edukacji matematycznej.

## Jaki jest kierunek zmian

### Nowe standardy egzaminacyjne

Zdający posiada umiejętności w zakresie:

- wykorzystania i tworzenia informacji
- wykorzystania i interpretowania reprezentacji
- modelowania matematycznego
- użycia i tworzenia strategii
- rozumowania i argumentacji.

W ślad za ograniczeniem treści programowych i położeniem nacisku na najważniejsze dla matematyki aktywności, zmieniona została treść standardów wymagań egzaminacyjnych.

Widzą Państwo listę nowych standardów. Proszę zwrócić uwagę, że w ich sformułowaniu wskazano na kierunek zachodzących zmian. Z pięciu standardów trzy: trzeci, czwarty i piąty odwołują się do umiejętności absolutnie kluczowych we współczesnym spojrzeniu na nauczanie matematyki.

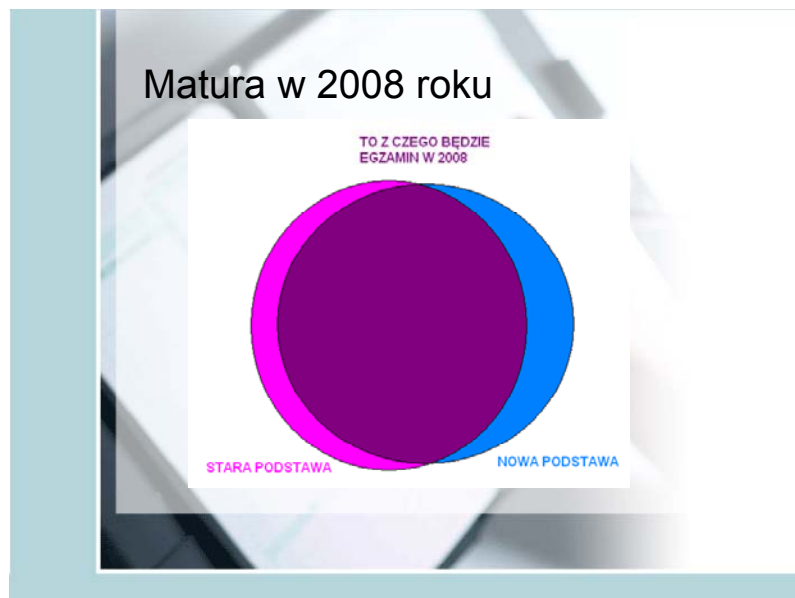
Umiejętność **modelowania matematycznego**, czyli przetworzeniu jednego typu rzeczywistości w drugą. Z jednej strony to umiejętność zbudowania wyrażenia, wzoru czy równania opisującego realną rzeczywistość za pomocą symboli matematycznych, a z drugiej to umiejętność zastąpienia jednej abstrakcyjnej rzeczywistości np. pojęć geometrii klasycznej inną np. opisanie figur geometrycznych i ich własności za pomocą narzędzi oferowanych przez geometrię analityczną to znaczy uprawianą w układzie współrzędnych

**Użycie i tworzenie strategii** to te umiejętności, które potrzebne są nie tylko w planowaniu i rozwiązywaniu zadań matematycznych. Matematyka jest tą dziedziną wiedzy, która pozwala na kształtowanie i doskonalenie takich umiejętności.

**Rozumowanie i argumentacja** to podstawowe aktywności pozwalające na prezentowanie swoich rozwiązań, pomysłów i interpretacji, umożliwiające krytyczną ocenę zarówno swoich jak i innych przemyśleń.

Dwa pierwsze standardy odnoszą się do klasycznych, zawsze uczonych i wymaganych w szkole umiejętności. Komentarza wymaga sformułowanie standardu drugiego, który brzmi trochę nienaturalnie i bywa odbierany jako pseudonaukowa nowomowa. **Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** wydaje się niezrozumiałe. Otóż w matematyce szkolnej nie uczy się, już od dłuższego czasu i nic nie wskazuje na to by to się zmieniło; kompletnych teorii matematycznych. W matematyce wyższej funkcjonują: teoria liczb, algebra ze swoim strukturami takimi jak grupy, pierścienie i ciała, geometria budowana jako struktura o charakterze dedukcyjnym i wiele innych. W matematyce szkolnej posługujemy się tylko **reprezentacjami** pojęć z matematyki wyższej. I te reprezentacje wykorzystujemy i staramy się je interpretować w różnych kontekstach.

Nowe standardy wymagań egzaminacyjnych zaczynają obowiązywać począwszy od 2010 roku, od kiedy matematyka stanie się przedmiotem obowiązkowym. Podstawa programowa zaczęła obowiązywać od września 2007. Powstał pewien szum informacyjny, który może spowodować wątpliwości jak będzie wyglądał egzamin maturalny w roku 2008 i 2009. Która podstawa obowiązuje, jakie umiejętności na egzaminie będą sprawdzane?



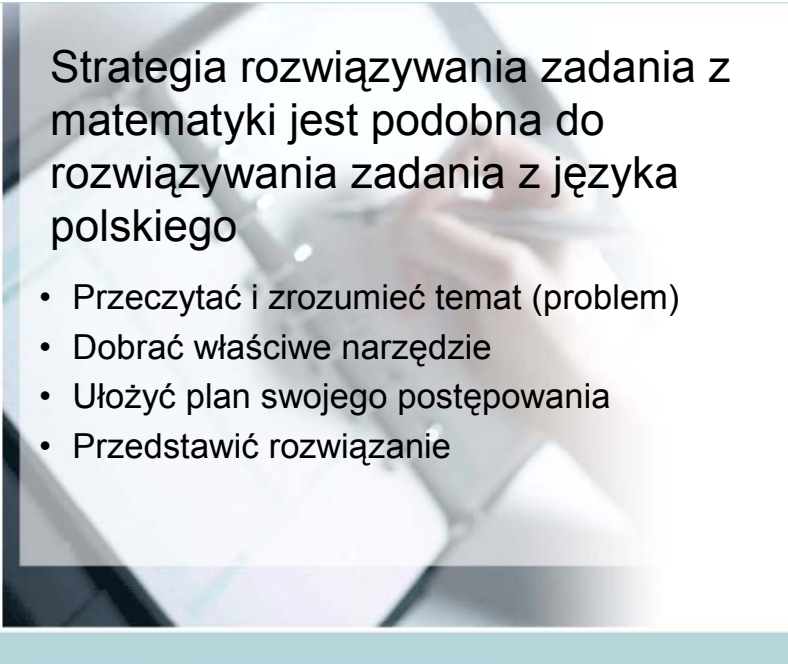
Aby uniknąć nieporozumień i najwcześniej jak można poinformować zdających o regułach egzaminu Dyrektor Centralnej Komisji Egzaminacyjnej ogłosił komunikat, w którym jasno określił zakres treści, które będą sprawdzane na egzaminie maturalnym z matematyki w 2008 roku. Raczej należy powiedzieć, że określił czego egzamin sprawdzać nie będzie, co prawie na jedno wychodzi. Przedstawiony na slajdzie graf ilustruje sposób wyboru tych treści. To co będzie sprawdzane na egzaminie w roku 2008 to po prostu część wspólna obu podstaw programowych: starej i nowej.

Zgodnie z komunikatem Dyrektora CKE ogłoszenie listy treści, które nie będą sprawdzane na egzaminach zewnętrznych w roku szkolnym 2007/2008, nie powinno prowadzić do odstąpienia od realizacji tych treści w szkole, jeśli występują w aktualnych programach nauczania.

### Komunikat Dyrektora CKE

**Ogłoszenie listy treści, które nie będą sprawdzane na egzaminach zewnętrznych w roku szkolnym 2007/2008, nie powinno prowadzić do odstąpienia od realizacji tych treści w szkole, jeśli występują w aktualnych programach nauczania.**

Ta część komunikatu wzbudziła wiele kontrowersji. Bo po co tracić czas na uczenie tych treści, które nie będą przedmiotem sprawdzania. Lepiej go poświęcić na dogłębne powtórzenie innych haseł programowych. Podzielię się z Państwem kilkoma przemyśleniami na ten temat. Po pierwsze Dyrektor CKE mógł nic nie powiedzieć i egzamin przeprowadzić tak jak zaplanował. Ja jednak cenię sobie, szczególnie w zarządzaniu oświatą, uczciwość i postępowanie „z otwartą przyłbicą” nawet, gdyby to narażało na niezbyt miłe dyskusje. Po drugie, nie realizowanie zatwierdzonego przez radę pedagogiczną programu nauczania jest postępowaniem niezgodnym z procedurami. Po trzecie i najważniejsze wreszcie, to kwestia pewnej uczciwości wobec uczniów. Wyższe uczelnie począwszy od 2010 roku zmieniają swoje programy, ale do tego czasu będą od swoich studentów wymagały znajomości tych pojęć. I wreszcie czwarty argument. Zacznę od anegdoty. Gdy 25 z okładem lat temu, kończyłem szkołę średnią, znałem program tej szkoły w zakresie matematyki bardzo dobrze co udało mi się potwierdzić końcoworoczną oceną i wynikiem egzaminu dojrzałości. Czy to oznaczało, że mogę zacząć uczyć w liceum? Nie i to nie tylko z powodów formalnych. Poszedłem na studia matematyczne, na których prawie nic bezpośrednio związanego z matematyką szkolną się nie robiło. Dlaczego więc stałem się lepszym nauczycielem? Otóż studia spowodowały, oprócz innych czynników, spojrzenie na szkolną matematykę z wyższego poziomu, umożliwiły choć nie wprost, głębsze zrozumienie treści nauczanych w szkole. Podobnie jest z uczeniem elementów, o których wiemy że na egzaminie sprawdzane nie będą. Realizacja tych treści wpływa bardzo korzystnie na rozumienie i przyswojenie takich, które treścią egzaminu będą. Dlatego, szczególnie w klasach lepszych i średnich, których absolwenci myślą o studiach technicznych, proponuję i zachęcam do zrealizowania wszystkich zaplanowanych treści.



## Strategia rozwiązywania zadania z matematyki jest podobna do rozwiązywania zadania z języka polskiego

- Przeczytać i zrozumieć temat (problem)
- Dobrać właściwe narzędzie
- Ułożyć plan swojego postępowania
- Przedstawić rozwiązanie

I już prawie na zakończenie postaram się Państwa przekonać, że matematyka nie jest straszna, że naprawdę jest nauką na wskroś humanistyczną, że wręcz jest podobna, szczególnie w aspekcie egzaminacyjnym, do języka polskiego.

Często słyszy się, szczególnie od nauczycieli niechętnych nowej formule egzaminu z języka polskiego: „*Musisz się wstrzelić w model. Jak się nie wstrzelisz w model, to nie zdasz egzaminu. Nie wiadomo przecież czego oni, to znaczy egzaminatorzy oczekują*”. I na potwierdzenie swoich słów często przytaczają przykłady zdających, którzy pomimo dużego potencjału intelektualnego nie odnieśli sukcesu egzaminacyjnego na miarę oczekiwań. Dlaczego?

Bo zarówno z matematyki jak i z języka polskiego niezmiernie ważne jest **uważne**, podkreślam uważne, przeczytanie całego tematu. Najwięcej błędów powstaje na tym etapie. Co z tego że napisałem wypracowanie porywającym językiem i zachwycającym stylem jak nie o tym, o czym miałem pisać? Co z tego, że rozwiązałem skomplikowane zadanie ze stereometrii, w którym miałem podaną miarę kąta, jeżeli narysowałem i rozpatrzyłem nie ten kąt o którym mowa w zadaniu. I z języka polskiego i z matematyki wypracowanie czy rozwiązanie musi być na temat! Do takiego rozwiązania jest przygotowany model, trudno się w niego „wstrzelić” jeżeli piszę o czymś innym.

Drugim krokiem jest dobranie właściwego narzędzia. Z języka polskiego to dobranie odpowiedniej formy wypowiedzi – rozprawki, opowiadania, streszczenia a z matematyki wybranie odpowiedniego modelu – równania, układu równań, czy wyrażenia.

Następnym etapem, niezwykle ważnym jest ułożenie planu. Co z tego że zgrabnie buduję zdania trafnie dobieram epitety, gdy moje myśli biegają od Sasa do Lasa. Myślę przesłanki z wnioskami, argumenty z tezami. Piszę wszystko co mi przyjdzie do głowy, liczę cokolwiek – może coś wyjdzie. Takie postępowanie ani w języku polskim ani w matematyce nie wróży sukcesu.

Czwarty krok to realizacja planu. Wymaga skupienia, koncentracji i konsekwencji.

I krok ostatni, którego nie ująłem w prezentacji. Dobre zadanie z języka polskiego wymaga rzutu oka wstecz, osobistego zaangażowania w to co się napisało, podsumowania swoich wywodów. Z matematyki konieczna jest ocena wyniku czy on jest realny. Często opowiadam anegdotę o zdającym egzamin z fizyki, który miał obliczyć wiek wszechświata mając wszystkie potrzebne dane. I obliczył. Według niego wiek wszechświata to 13 lat i 6 miesięcy. W ogóle go to nie zaskoczyło. To że sam jest nieco starszy od wszechświata wydało mu się zupełnie naturalne. Gdyby miał nawyk podsumowania swoich obliczeń, bez trudu znalazłby błąd.

Kolejnym mitem jest opinia, że „*egzamin maturalny w obecnej formule nie jest skrojony na miarę ani bardzo dobrego ani słabego ucznia*”. Ten kto takie zdanie prezentuje po prostu nie zna tego egzaminu. Przedstawię Państwu zadanie z ubiegłorocznego egzaminu maturalnego, a raczej jego rozwiązanie w trzech wersjach. Najpierw sam temat – motoryzacyjny.

## Egzamin maturalny nie musi być straszny

### Przykład zadania z egzaminu maturalnego z matematyki

#### Zadanie 4. (5 pkt)

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Samochód przejechał trasę o długości 210 km w pewnym czasie. Zwiększenie prędkości średniej o 10 km/h skróciłoby czas przejazdu o pół godziny. Trzeba policzyć z jaką średnią prędkością jechał ten samochód. Zadanie jak zadanie – w miarę naturalne - problemy z którymi spotyka się każdy kto planuje jakąś wycieczkę, wakacje czy wyjazd za miasto.

Na początek przedstawię Państwu modelowe rozwiązanie zaprezentowane na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej .

## Rozwiązanie typowe

### Zadanie 4. (5 pkt)

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Wprowadzam oznaczenia:

$v$  – średnia prędkość samochodu,

$\frac{210}{v}$  – czas, w którym samochód przebył drogę ze średnią prędkością  $v$ ,

$\frac{210}{v+10}$  – czas, w którym samochód przebył drogę ze średnią prędkością  $v+10$ .

Warunki zadania zapisuję za pomocą równania:  $\frac{210}{v} - \frac{210}{v+10} = \frac{1}{2}$ ,

które po przekształceniu przyjmuje postać:  $v^2 + 10v - 4200 = 0$ .

Rozwiązaniem równania są liczby:  $v_1 = 60$ ,  $v_2 = -70$ . Odrzucam rozwiązanie

$v_2 = -70$ , które jest niezgodne z warunkami zadania.

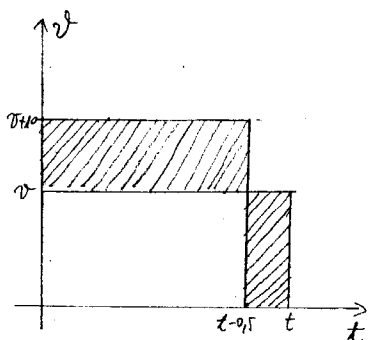
Odpowiedź: Samochód jechał ze średnią prędkością 60 km/h.

Po każdym egzaminie, już od dwóch lat takie rozwiązania są prezentowane po to, żeby zdający mogli porównać swoje rozumowanie i wyniki z tymi zaproponowanymi przez eksperta bezpośrednio po egzaminie. Czy to znaczy, że inne rozwiązania są niedopuszczalne? W żadnym razie.

## Zadanie to pozwalało na wykazanie się inwencją i wiedzą

### Zadanie 4. (5 pkt)

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.



$$\begin{cases} s = v \cdot t \\ 10(t-0,5) = 0,5 \cdot v \Rightarrow v = 20t - 10 \end{cases}$$

$$210 = (20t - 10)t$$

$$20t^2 - 10t - 210 = 0$$

$$2t^2 - t - 21 = 0$$

$$\Delta = 169$$

$$t_1 = \frac{1-13}{4} < 0 \text{ nie ma sensu fizycznego}$$

$$t_2 = 3,5$$

$$v = \frac{210}{3,5} = 60$$

Oto przykład rozwiązania przedstawionego przez bardzo dobrego ucznia. Zauważył on, że skoro droga to iloczyn prędkości i czasu to można ją zilustrować polem prostokąta, którego boki mają takie właśnie długości. Droga, o której mowa w zadaniu, przebyta czy szybciej, czy wolniej jest taka sama, więc pola odpowiednich prostokątów muszą być równe. Stąd równe muszą być pola zakreskowanych prostokątów, bo o nie różnią się duże prostokąty. Wynikające z tego rozumowania proste równanie łatwo już rozwiązać. Co zyskał zdający, który potrafił takie rozwiązanie znaleźć? Czas! Może go wykorzystać na rozwiązanie kolejnego zadania lub po prostu na spokojne sprawdzenie swoich obliczeń

I za chwilę ostatni slajd. Rozwiązanie ucznia, którego matematyka nie jest najmocniejszą stroną. To mój sąsiad, którego bezpośrednio po zakończeniu egzaminu poprosiłem o relację. Oto ona.

**Lub inteligencją i umiejętnością „radzenia sobie”**

**Zadanie 4. (5 pkt)**

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

*Fizyka! Dramat! Nie pamiętam żadnego wzoru! Jak to było...? Prędkość to droga razy czas? Jakoś tak...! Chwilka przeciw prędkość jest w kilometrach na godzinę! Więc we wzorku musi być droga (w kilometrach) przez czas (w godzinach). Hurra! Mam!  $v = \frac{S}{t}$ . No dobra i co z tego? Może jakoś oszacować? Ile kilometrów przejeżdża średnio samochód w ciągu godziny? W trasie jakaś 40-70. Nie dali na pewno jakichś zawrotnych szybkości. Byłoby niepedagogicznie. OK. Załóżę, że na początku jechał z prędkością 40 km/h. Wtedy jego podróż trwałaby zaraz, zaraz...*

$$v = \frac{S}{t}$$

$$t = \frac{S}{v} \quad t = \frac{210}{40} = 5 \frac{1}{4}$$

*Gdyby jechał o 10 km/h prędzej to  $t = \frac{210}{50} = 4 \frac{1}{5}$  źle, bo  $5 \frac{1}{4} - 4 \frac{1}{5} \neq \frac{1}{2}$  za duża różnica. Musiał jechać szybciej. Jakoś to trzeba uporządkować.*

v	v+10	$t_1 = \frac{210}{v}$	$t_2 = \frac{210}{v+10}$	$t_1 - t_2$
45	55	4,667	3,818	0,849
50	60	4,2	3,5	0,7
55	65	3,818	3,231	0,587
60	70	3,5	3	0,5 hura!

Pierwsza reakcja zdającego to strach. Reakcja niemal automatyczna gdy znajdujemy się w sytuacji zagrożenia. I teraz występują dwie charakterystyczne postawy. Pierwsza to rezygnacja. Bardzo typowa w sytuacji, która jest podobna do tych jakie kilkakrotnie prowadziły do niepowodzenia. Są takie słowa – klucze, skutecznie zniechęcające do podejmowania wysiłku rozwiązywania zadania. Klasycznym przykładem są słowa udowodnij, wykaż, uzasadnij. Każdy nauczyciel matematyki wie, że zadanie: rozwiąż równanie kwadratowe i tu równanie – potrafi rozwiązać prawie każdy, a prawie identyczne – udowodnij, że liczby 3 i 5 są rozwiązaniami równania i tu odpowiednie równanie rozwiąże mniej niż połowa typowej klasy. Podobnie uczniowie reagują na zadanie z kontekstem fizycznym. Na szczęście mój sąsiad przyjął drugą postawę. Spróbował zmierzyć się z trudnościami. Najpierw dokonał szacowania. To bardzo ważna umiejętność, często w szkole niedoceniana. W życiu codziennym bardzo często posługujemy się tym narzędziem, często nawet nie uświadczając sobie tego. Szacowanie może mieć różne aspekty. Ciekawym jest doświadczenie osobiste. Prędkość samochodu nie powinna być zbyt duża – byłoby niepedagogicznie. Drugi dobry krok, który został wykonany to próba sprawdzenia czy oszacowana wielkość jest dobra. Ponieważ możliwości jest wiele a pierwsza próba się nie powiodła kolejny krok to uporządkowanie sprawdzania, które w końcu doprowadziło do sukcesu. Zdający otrzymał za rozwiązanie tego zadania pełną liczbę punktów. Problem przed



nim stojący został rozwiązany. Co z tego że metodami elementarnym. Ortodoksyjni matematycy mogą powiedzieć, że metoda, którą zdający obrał nie gwarantuje mu zawsze sukcesu. Przecież gdyby prędkość wynosiła nie 60, a na przykład  $20\pi$ , to w ten sposób nie dałoby się jej obliczyć. Ale zdający rozwiązywał **to** zadanie. Gdyby miał inne może użyłby innego narzędzia, innej strategii. A tak na marginesie.... Gdyby zdający miał komputer i w arkuszu kalkulacyjnym zbudował analogiczną tabelkę i zadeklarował krok nie co 5km/h ale co 0,01km/h, to nie znalazłby rozwiązania? Taka dokładność nie wystarczy? Według mnie w kontekście tego zadania w zupełności wystarczy.

Mam nadzieję, że przekonałem Państwa do tego, że matematyka nie jest straszna, że można o niej myśleć jak o nauce humanistycznej, niezbędnej współczesnemu człowiekowi i że można z nią sobie radzić, a zadania trudne są często tylko pozornie a odrobina wysiłku pozwoli odkrywać nie tylko jedną drogę prowadzącą do rozwiązania. Tego Państwu nie tylko w problemach matematycznych serdecznie życzę.